

Михеев В.И.
Павлюченко Ю.В.

Высшая математика, краткий курс



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 51
ББК 22.1
М 69

Михеев В.И., Павлюченко Ю.В. **Высшая математика, краткий курс:** Учеб. пособие. — 2-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 196 с. — ISBN 978-5-9221-0978-9.

Пособие по высшей математике, содержащее все основные разделы курса, предназначено в первую очередь для студентов тех направлений и специальностей, для которых предусмотрен укороченный (односеместровый) курс высшей математики. В конце каждого раздела имеются вопросы и задачи для самопроверки, а также домашние и аудиторные задания. В конце пособия приведено примерное содержание заключительной практической или экзаменационной работы, рассчитанной на студента, изучившего все представленные в пособии разделы математики.

Подготовлено на кафедре высшей математики Российского университета дружбы народов.

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по нематематическим направлениям подготовки и специальностям.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию	5
Предисловие ко второму изданию	7
Введение.	8
Глава 1. Алгебра и геометрия: старейшие ветви математики	11
§ 1. Алгебра: числовые множества	12
§ 2. Геометрия: некоторые классические соотношения.	18
§ 3. Действительная числовая ось и система координат на плоскости — синтез алгебры и геометрии	20
<i>Вопросы для самопроверки.</i>	23
<i>Задания для аудиторной и домашней работы.</i>	23
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 1</i> . .	24
Глава 2. Алгебра: системы линейных уравнений	26
§ 1. Линейные уравнения	27
§ 2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.	28
§ 3. Определители. Правило Крамера	33
<i>Вопросы для самопроверки.</i>	36
<i>Задания для аудиторной и домашней работы.</i>	37
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 2</i> . .	39
Глава 3. Аналитическая геометрия: прямая линия и кри- вые второго порядка	41
§ 1. Простейшие задачи	42
§ 2. Различные виды уравнений прямой	43
§ 3. Кривые 2-го порядка	52
<i>Вопросы для самопроверки.</i>	60
<i>Задания для аудиторной и домашней работы.</i>	61
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 3</i> . .	63
Глава 4. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности	65
§ 1. Числовые последовательности: определения и примеры . .	66
§ 2. Предел числовой последовательности.	73
<i>Вопросы для самопроверки.</i>	85
<i>Задания для аудиторной и домашней работы.</i>	86
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 4</i> . .	89
<i>Приложение</i>	90
Глава 5. Функции: основные определения и понятия, гра- фики функций. Обзор основных элементарных функций	91
§ 1. Первоначальные сведения о функциях.	92
§ 2. Основные элементарные функции	96
§ 3. Класс элементарных функций	106
<i>Вопросы для самопроверки.</i>	109
<i>Задания для аудиторной и домашней работы.</i>	109
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 5</i> . .	111

Глава 6. Функции: предел и непрерывность	113
§ 1. Теория пределов	113
§ 2. Непрерывные функции	126
<i>Вопросы для самопроверки</i>	132
<i>Задания для аудиторной и домашней работы</i>	133
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 6</i> ..	135
Глава 7. Дифференцирование функций. Исследование функций с помощью производных	137
§ 1. Основные определения и понятия	139
§ 2. Техника дифференцирования	143
§ 3. Основные теоремы дифференциального исчисления	149
§ 4. Исследование функций с помощью производных	152
§ 5. Пример полного исследования функции	155
<i>Вопросы для самопроверки</i>	158
<i>Задания для аудиторной и домашней работы</i>	160
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 7</i> ..	163
Глава 8. Интегрирование функций	164
§ 1. Неопределенный интеграл: основные определения и понятия	165
§ 2. Определенный интеграл	173
<i>Вопросы для самопроверки</i>	182
<i>Задания для аудиторной и домашней работы</i>	183
<i>Задания для индивидуальной домашней работы № 8</i> ..	186
<i>Приложение «Догонит ли Ахиллес Черепаху?»</i>	188
<i>Примерный вариант итоговой зачетной или экзаменационной работы</i>	194
<i>Литература</i>	195
<i>Дополнительная литература</i>	195

Предисловие к первому изданию

Предлагаемое пособие возникло как итог многолетней преподавательской работы авторов: чтения лекций, проведения практических занятий, а также зачетов и экзаменов — со студентами различных направлений и специальностей, для которых предусмотрен укороченный курс высшей математики. Пособие состоит из введения и восьми глав, включающих следующие разделы высшей математики: системы линейных уравнений и определители, аналитическая геометрия на плоскости, последовательности, пределы и непрерывность функций, дифференцирование и интегрирование функций. В каждом параграфе изложению программного материала предшествует краткая преамбула, затем излагается теория, далее следует перечень контрольных вопросов, позволяющих учащимся адекватно оценить уровень приобретенных на тот или иной момент обучения знаний; заключают главы задания для аудиторной и домашней работы и варианты индивидуальных домашних заданий.

Преамбула, с которой начинается каждая глава, в общих чертах вводит учащегося в курс дела, которым предстоит заниматься в ближайшее время. В этом своеобразном вступлении вкратце рассказывается, какие аналоги или прообразы анонсируемых математических понятий присутствуют в обыденной жизни, в окружающем нас мире, в истории и т. д. Иными словами, по мере возможности обрисовывается круг вопросов и понятий, с которыми учащемуся предстоит встретиться, и место, отводимое данному разделу среди других тем.

Излагая теорию, авторы зачастую отказываются от традиционной для классических руководств по математике последовательности подачи материала: определение, теорема, доказательство, следствия и т. д. Взамен этого, как правило, принимается другая схема изложения, в которой, наряду с определениями и теоремами, главенствующая роль отводится наводящим соображениям, графическим иллюстрациям и примерам. Осознавая, что для строгого обоснования математических истин рисунков и примеров недостаточно, авторы, тем не менее, допускают, что специально подобранные примеры и чертежи могут быть полезны как для интерпретации, так и для обнаружения общих математических закономерностей. По нашему мнению, такой подход

дает возможность наилучшим образом раскрыть учащемуся суть предмета, неблизкого ему по духу, к тому же в предельно сжатые сроки.

Роль задач в пособии многофункциональна. Во-первых, примеры практических задач рассматриваются в тексте каждого параграфа для того, чтобы показать учащимся типичные для высшей математики методы и приемы их решения; при этом нередко возникают наводящие соображения, ведущие к теоретическим результатам общего характера. Во-вторых, большое число задач для семинарской и домашней работы приводится в конце каждого параграфа. Расположенные в порядке усложнения, они могут быть использованы до того или иного уровня трудности в зависимости от конкретной обстановки. В-третьих, к каждому параграфу прилагается индивидуальное домашнее задание. Авторы исходят из того, что умение самостоятельно решать типовые задачи различной степени трудности является важным критерием при оценке знаний студентов нематематических специальностей — основных адресатов этой книги — и при выведении итогового рейтинга, характеризующего их успехи в этом предмете.

Значительное место в книге отводится элементарной математике. Школьные математические познания составляют первичную базу и языковую основу курса, они вкрапливаются в новую ткань, исподволь подводя учащегося к восприятию разделов высшей математики как новых ветвей единого математического древа. Давид Гильберт утверждал, что «математическая наука есть неделимое целое, организм, жизнестойкость которого обуславливается связанностью его частей». Концепция авторов базируется на уверенности в том, что многие упущения и недоработки в полученном в свое время школьном образовании могут быть устранены в высшей школе — по крайней мере, в такой степени, чтобы не стать непреодолимым препятствием для обладателей аттестата зрелости, желающих получить университетское образование и готовых приложить для этого необходимые усилия.

Введение содержит обстоятельные рекомендации студентам, как изучать математику по данному пособию. Его авторы видели свою задачу в том, чтобы создать учебник, который не отпугнет одних читателей излишней «ученостью» и не оттолкнет других наивной тривиальностью, и тем самым даст всем первокурсникам необходимую для дальнейшего профессионального образования математическую базу и, по возможности, будет способствовать их интеллектуальному росту. В какой мере удалось реализовать замысел и создать книгу, по которой изучение математики станет

не только «осознанной необходимостью», но и вполне доступным, а быть может, и увлекательным занятием, покажет время.

Авторы выражают искреннюю признательность и благодарность рецензентам профессору Е. В. Шикину и доценту А. Б. Будаку за внимательное и доброжелательное прочтение пособия и за высказанные ценные замечания и полезные советы по содержанию и оформлению книги. Мы заранее благодарим читателей, которые не сочтут за труд сообщить свое мнение об этой книге.

В. И. Михеев
Ю. В. Павлюченко

Предисловие ко второму изданию

Второе издание в основных чертах воспроизводит содержание первого. Сохранены стиль изложения, последовательность и форма подачи материала. Исправлены опечатки, замеченные авторами и сообщенные читателями, за что авторы приносят им искреннюю благодарность. Устранены отдельные шероховатости в тексте пособия. Некоторые задачи заменены более содержательными. Для большей иллюстративности в некоторых местах к теории алгебраического характера добавлены новые геометрические примеры.

В. И. Михеев
Ю. В. Павлюченко

ВВЕДЕНИЕ

Приступая к изучению математики по этой (или какой-либо другой) книге, последуйте приводимым здесь простым рекомендациям. Самая первая из них состоит в том, что самостоятельная работа над книгой должна сочетаться с безусловным систематическим посещением всех аудиторных занятий. Разумеется, это требуется при изучении всех университетских дисциплин. Быть может, математика отличается от других предметов лишь тем, что в ней в наибольшей степени все темы учебного материала и звенья учебного процесса тесно взаимосвязаны и нельзя понять последующего, не усвоив предыдущего. Всякий оставшийся не разобранным вопрос с чрезвычайной быстротой (в геометрической прогрессии!) обрастает новыми неясностями, превращаясь сначала в неусвоенную тему, затем в непонятый раздел и в итоге — в непостижимую науку.

Прослушав и, по возможности, записав лекцию, в тот же день, в крайнем случае, на следующий, приведите в порядок свои записи, воспользовавшись учебным пособием. Вдумчивое чтение соответствующего раздела учебника уточняет и углубляет знание предмета и обогащает язык точными формулировками. При первом чтении нового раздела учебника обращайтесь главным образом на новые понятия и идеи, на их связь с уже встречавшимися ранее — в предыдущих параграфах или в элементарной математике, не вдаваясь в детали вычислений и в подробности доказательств. Читая вторично, аккуратно выполните все выкладки и сделайте соответствующие чертежи. Решите самостоятельно приводимые в книге примеры и сверьтесь с ответом в книге. Проясняя суть дела, примеры, как правило, облегчают понимание вопроса, делают теоретические утверждения более осязаемыми и прозрачными. Усвоив теоретический материал, вы будете быстрее решать задачи на семинарах и с большей легкостью выполнять варианты индивидуальных домашних заданий.

Встречая новое математическое понятие, постарайтесь прежде всего понять, откуда оно возникло, при решении каких вопросов появилась необходимость в этом понятии и как его введение позволяет решать эти вопросы. Вдумчиво относитесь к содержанию и доказательству теорем, выводу формул и вообще к последовательному, логическому построению той или иной теории. А пролистав хотя бы несколько страниц учебника вперед, вы будете увереннее и легче чувствовать себя на следующем занятии.

Изучив очередной раздел, проверьте себя по контрольным вопросам, относящимся к пройденным темам. При необходимости вернитесь повторно к непонятным местам.

Только овладев теоретическим материалом, приступайте к самостоятельному решению новых задач по данной теме. Попытки решать задачи по формулам, не понимая их содержания, приводит к механическому усвоению курса. Студент, знающий лишь формулы — например, из справочника — всегда окажется беспомощным в решении вопросов, хотя бы немного отличающихся от стандартных.

Решая задачи высшей математики, часто приходится пользоваться формулами и приемами элементарной математики, например, тождественными преобразованиями, облегчающими дальнейшее применение новых методов. В таких случаях необходимо освежить в памяти соответствующие места школьного курса математики.

Приступая к решению индивидуального домашнего задания, просмотрите еще раз все задачи на эту тему, решенные на предшествующем семинаре; затем действуйте самостоятельно, начиная с самых простых заданий, постепенно переходя к более сложным. Как правило, в пособии задачи для самостоятельной работы расположены в порядке возрастания трудности; такой последовательности — от простого к сложному — и следует придерживаться. Нередко одну и ту же задачу можно решить разными способами; разобравшись в постановке задачи и правильно оценив уровень ее трудности, постарайтесь найти наиболее простой способ решения. Не упускайте из виду и то обстоятельство, что задача, которая встретилась в одном разделе, может быть сформулирована в других терминах и казаться относящейся к другой области математики. Например, полученный алгебраический результат нередко получает геометрическое истолкование. Такой анализ интересен и необычайно полезен. Он не только

обогащает знания, но и подводит к пониманию внутреннего единства математики, что в дальнейшем, безусловно, расширит ваши возможности при применении математических методов в работе по основной специальности.

В заключение повторим, что умение решать типовые задачи различной степени трудности является основным критерием при оценке полученных знаний. Оно является главным основанием как для получения зачета или сдачи экзамена, так и при выведении итогового рейтинга, характеризующего ваши успехи в математике.

Глава 1

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ: СТАРЕЙШИЕ ВЕТВИ МАТЕМАТИКИ

*И сказал Господь Моисею в пустыне
Синайской: исчисли!... И сделал он ис-
числение им...*

Ветхий Завет, Числа, 1

*Измерить все, что поддается измере-
нию, а что не поддается — сделать
измеряемым!*

Галилео Галилей

В сознании большинства людей слово «Математика» (от греческого слова *mathema* — *наука, познание*) ассоциируется, прежде всего, с *алгеброй* и *геометрией* — предметами школьного курса. Это не только *хронологически* первые разделы математики в жизни отдельного человека, но и *исторически* первые ветви *математического древа*, взращиваемого выдающимися умами человечества на протяжении тысячелетий. Еще в средневековых университетах (например в Оксфорде в XIV–XV вв.) в числе семи обязательных общеобразовательных наук (*artes liberales*) студент изучал арифметику и геометрию и только после этого специализировался в медицине, юриспруденции или астрологии. На Руси указом Петра I молодым дворянам предписывалось в пятнадцатилетнем возрасте сдать экзамен по этим предметам. В наши дни умение легко оперировать числами и хорошая осведомленность в геометрии стали «предметами первой необходимости» для каждого школьника и, тем более, для тех, кто не намерен останавливаться на *среднем* образовании. Поэтому, прежде чем приступить к *высшей* математике, полезно «освежить в памяти» некоторые фундаментальные понятия *элементарной* математики.

§ 1. Алгебра: числовые множества

«Числа не управляют миром, но показывают, как управляется мир» — утверждал великий немецкий поэт Иоганн Вольфганг Гете. Перечислим известные из курса средней школы числовые множества. В процессе учебы они появляются последовательно, по мере усложнения арифметических и алгебраических задач.

Натуральные числа

Первое из этих множеств — натуральный ряд чисел, его обычно обозначают $\mathbb{N}$: $\{1, 2, 3, \dots\}$. Какие действия можно выполнять на этом числовом множестве — иначе говоря, для выполнения каких алгебраических операций «достаточно» этих чисел? Ответ вполне очевиден: складывая или перемножая два (a затем и три, и четыре и т.д.) натуральных числа, мы получаем также натуральные числа; то есть этих чисел «достаточно» для выполнения двух операций — *сложения* и *умножения* (в частности, для умножения числа на себя, то есть для *возведения в степень*). Эти свойства натуральных чисел записываются следующим образом: если $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ (читается: если a и b принадлежат $\mathbb{N}$), то и $a + b \in \mathbb{N}$ ($a + b = b + a$) и $ab \in \mathbb{N}$ ($ab = ba$). Приведем примеры задач, решаемых на этом числовом множестве.

Пример 1.

На дорогу от дома до университета и обратно у студента ежедневно уходит 30 минут на метро и 20 минут на автобусе. Сколько времени тратит он на дорогу каждую неделю, состоящую из 6 рабочих дней?

Решение.

1) $30 + 20 = 50$ мин.

2) $50 \cdot 6 = 300$ мин.

Ответ: 300 минут.

Пример 2.

Комната в студенческом общежитии имеет форму квадрата со стороной $a = 3$ м. Какова ее площадь S ?

Решение.

$$S = a^2.$$

Ответ: $S = 9 \text{ м}^2$.

Целые числа

Посмотрим, как обстоит дело с *вычитанием*, иначе говоря, проверим, «достаточно» ли натуральных чисел для того, чтобы определить разность $a - b$ и $b - a$, если $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$? Вот простые примеры: $10 - 6 = 4$, а $6 - 10 = ?$ или $10 - 10 = ?$

Приведем примеры задач, требующих выполнения *вычитания*.

Пример 3.

Из стипендии в 500 руб. студент в первый же день потратил на товарищеский ужин 200 руб. Сколько денег у него осталось до следующей стипендии?

Решение.

$$500 - 200 = 300 \text{ руб.}$$

Ответ: 300 руб.

Пример 4.

Получив стипендию 500 руб., один из студентов потратил 600 руб. на цветы для своей подруги, второй же в аналогичной ситуации ограничился духами, стоившими как раз 500 рублей. Сколько денег осталось у каждого из студентов?

Решение.

$$1) 500 \text{ руб.} - 600 \text{ руб.} = ?$$

$$2) 500 \text{ руб.} - 500 \text{ руб.} = ?$$

Понятно, что у второго студента кошелек полностью опустел, первому же пришлось 100 руб. просить в долг. Между тем, в обоих случаях среди натуральных чисел ответов к этим задачам не находим.

Поэтому для описания вполне жизненных ситуаций такого рода требуется *ввести в обращение нулевые* или *минусовые* деньги, то есть в дополнение к натуральным числам присоединить еще *отрицательные числа* и *нуль*.

Таким образом, множество натуральных чисел *расширяется* до множества *целых чисел* — его обычно обозначают

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

На множестве целых чисел без всяких ограничений можно выполнять сложение, умножение и вычитание. Если $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, то

$$a + b \in \mathbb{Z}, \quad ab \in \mathbb{Z}, \quad a - b \in \mathbb{Z}, \quad b - a \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. Отметим, что термины «положительные» и «отрицательные» имеют широкое обиходное, весьма далекое от математики, применение: *положительное решение вопроса, отрицательное влияние* и т. д. Экономисты и политики часто говорят: *нулевой баланс, нулевой вариант* и т. д. Мы и в дальнейшем будем соотносить привычные для нас расхожие выражения с их математическими эквивалентами.

Рациональные числа

Выясним, как обстоит дело с *делением*, иначе говоря, проверим «достаточно» ли натуральных чисел для того, чтобы определить отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$, если $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$? Простые примеры показывают, что это далеко не так. Например, $\frac{15}{3} = 5$, а $\frac{3}{15} = ?$

Приведем простую задачу из жизни, требующую выполнения деления.

Пример 5.

Пусть студент получает стипендию в размере 500 руб., магистрант — 750 руб., а аспирант — 1000 руб. Во сколько раз студент получает меньше аспиранта и магистранта?

Решение.

Обозначим искомое отношение через n . Имеем:

$$\text{в первом случае } n = \frac{1000}{500} = 2;$$

$$\text{во втором случае } n = \frac{750}{500} = ?$$

Таким образом, для описания простых жизненных ситуаций только целых чисел «не достаточно».

Поэтому возникает потребность *расширить* множество целых чисел до множества *рациональных (дробных) чисел* $\mathbb{Q}$ — это числа вида $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

На множестве рациональных чисел можно выполнять арифметические действия: сложение, вычитание, умножение и деление: если $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$, то

$$\begin{aligned} a + b \in \mathbb{Q}, \quad ab \in \mathbb{Q}, \quad a - b \in \mathbb{Q}, \quad b - a \in \mathbb{Q}, \\ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ (b \neq 0), \quad \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \ (a \neq 0). \end{aligned}$$

Возвращаясь к примеру 5, мы можем теперь найти ответ и во втором случае: $n = 750/500 = 3/2$, то есть стипендия студента

в полтора раза меньше, чем магистранта; другими словами, студенческая стипендия составляет $\frac{2}{3}$ стипендии магистранта.

Перефразируем *пример 1*.

На дорогу от дома до университета и обратно у студента ежедневно уходит 30 минут на метро и 20 минут на автобусе. Сколько *часов* тратит он на дорогу каждую неделю, состоящую из 6 рабочих дней?

Решение.

Учитывая, что 30 мин. = $\frac{1}{2}$ ч., а 20 мин. = $\frac{1}{3}$ ч., получаем:

$$1) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \text{ ч.} \quad 2) \frac{5}{6} \cdot 6 = 5 \text{ ч.}$$

Ответ: 5 часов.

Возвращаясь к приведенным выше задачам, запишем их в виде *уравнений*, сведя в таблицу:

Примеры	Конкретный вид	Общий вид
$30 + 20 = x$	$30 + 20 = x$	$a + b = x$
$50 \cdot 6 = x$	$50 \cdot 6 = x$	$ab = x$
$500 - 200 = x$	$200 + x = 500$	$a + x = b$
$500 - 600 = x$	$600 + x = 500$	
$500 - 500 = x$	$500 + x = 500$	
$\frac{1000}{500} = x$	$500x = 1000$	$ax = b$
$\frac{750}{500} = x$	$500x = 750$	

При таком подходе явственно проступает принципиальное алгебраическое различие этих задач.

1. В первом примере по двум слагаемым нужно найти сумму.
2. Во втором примере по двум сомножителям нужно найти произведение.
3. В следующих трех примерах по одному из слагаемых и сумме нужно определить второе слагаемое — это действие *обратно* сложению.

Вычитание — операция, обратная сложению.

4. В двух последних примерах по одному из сомножителей и произведению нужно определить второй сомножитель — это действие *обратно* умножению.

Деление — операция, обратная умножению.

Обратим внимание на то обстоятельство, что при таком взгляде оба расширения числовых множеств: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ преследовали идентичные цели: сделать возможными *обратные операции*.

Действительные числа

Напомним, что возведение в степень имеет две обратные операции: *извлечение корня* и *логарифмирование*.

Пример 6.

Соотношение $3^2 = 9$ позволяет написать три уравнения:

$$3^2 = x, \quad x^2 = 9, \quad 3^x = 9.$$

Решение.

В первом из уравнений неизвестна *степень*, во втором — *основание степени*, в третьем — *показатель степени*.

Первое уравнение, по определению, решается умножением:

$$x = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9.$$

Второе уравнение решается извлечением квадратного корня из 9:

$$x = \sqrt{9} = 3.$$

Третье уравнение решается логарифмированием числа 9 по основанию 3:

$$x = \log_3 9 = 2.$$

В этом примере для решения уравнений «достаточно» множества рациональных чисел (и даже натуральных чисел), но так бывает далеко не всегда. Для уравнений: $x^2 = 2$, $2^x = 3$ формальная запись результатов: $x = \sqrt{2}$, $x = \log_2 3$ (аналогичная приведенным выше) не имеет смысла на множестве рациональных чисел. Убедимся, например, в том, что среди рациональных чисел нет числа, которое мы обозначили $\sqrt{2}$. Предположим противное, то есть: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ и дробь $\frac{a}{b}$ — несократима. Тогда $a = b\sqrt{2}$ и $a^2 = 2b^2$, то есть a^2 — четное число. Но тогда и число a — четное: $a = 2n$, ($n \in \mathbb{N}$). Поэтому $a^2 = 4n^2$ и $b^2 = 2n^2$, то есть число b^2 , а следовательно, и b — также четные числа. Но

если числа a и b оба четные, то дробь $\frac{a}{b}$ можно сократить на 2, а это противоречит условию, что $\frac{a}{b}$ — несократимая дробь.

Итак, среди *рациональных чисел* нет корня уравнения $x^2 = 2$. Между тем, здравый смысл подсказывает, что это уравнение должно иметь корень! Посмотрим на *геометрические* задачи, приводящие к этому выводу.

Пример 7.

Диагональ x квадрата со стороной a удовлетворяет, по теореме Пифагора, уравнению

$$x^2 = 2a^2.$$

Поэтому при $a = 1$ приходим к уравнению $x^2 = 2$.

Пример 8.

Площадь S квадрата со стороной a находится по формуле $S = a^2$. Какова сторона x квадрата, площадь S которого равна 2? Имеем $x^2 = 2$.

Таким образом, из геометрических соображений заключаем, что «в природе» должно быть *число*, удовлетворяющее уравнению $x^2 = 2$. Это число называется *иррациональным*. Также иррациональны корни уравнений: $x^2 = 3$, $x^3 = 5$ и т. п. Эти иррациональные числа называются *алгебраическими*.

Корень уравнения $2^x = 3$, обозначаемый $x = \log_2 3$, также является *иррациональным* числом. Это число и аналогичные ему иррациональные корни уравнений: $2^x = 5$, $3^x = 4$ и т. д. называются *трансцендентными числами*.

Число π , выражающее отношение длины l окружности с радиусом R к диаметру $d = 2R$, также является трансцендентным: $\pi = \frac{l}{2R}$ ($\pi \approx 3,14$).

Вообще, существует бесконечное множество трансцендентных чисел, их появление связано с операцией предельного перехода, которая в курсе *элементарной математики* фактически не изучается.

Полноление множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел иррациональными числами приводит к множеству действительных чисел, обычно его обозначают $\mathbb{R}$. Это основное числовое множество, с которым имеет дело математика.

Замечание. Термины «рациональное» (*разумно обоснованное*), «иррациональное», то есть нерациональное (*недоступно пониманию*), «трансцендентное» (*выходящее за пределы сознания*) происходят от греческих корней. Они встречаются и в обиходной речи: «рациональное предложение», «нерациональный путь достижения цели» и т. д.

§ 2. Геометрия: некоторые классические соотношения

Аналогично тому, как в алгебре первоначальным понятием является число, так в геометрии первичными понятиями являются точка, линия (в частности, прямая), поверхность (в частности, плоскость).

Используя эти первичные понятия, математики с давних пор ставили и решали многочисленные геометрические задачи, отражающие наше представление об окружающем пространстве. В древности дальше других в этом продвинулись древнегреческие математики — имена Пифагора, Евклида, Архимеда на слуху у каждого человека, знакомящегося с началами школьной геометрии. Их исследования были чрезвычайно глубоки. Они представляются еще более поразительными, если принять во внимание, что в те времена еще не было алгебраического аппарата, которым сегодня (в меру своих успехов!) владеет каждый школьник.

Более того, многие хорошо известные нам *алгебраические* формулы пришли из *геометрии*. В качестве примера напомним одну из основополагающих алгебраических формул:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Для древнегреческих математиков она имела «геометрическое звучание»! Фигурирующие в ней символы a , b , $a + b$, a^2 , b^2 , $(a + b)^2$ выражали соответствующие длины и площади. Из рис. 1 видно, что записанная в левой части площадь квадрата со стороной $a + b$ равняется записанной в правой части сумме площадей 2-х квадратов и 2-х прямоугольников.

Покажем как *геометрически* доказывается *теорема Пифагора*: в прямоугольном треугольнике (рис. 2) квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов: $a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательство.

Площадь изображенного на рис. 3 большого квадрата со стороной $a + b$ равна $(a + b)^2$. В то же время, этот квадрат состоит из малого (внутреннего) квадрата со стороной c и четырех рав-

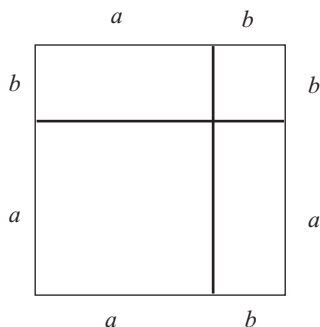


Рис. 1.

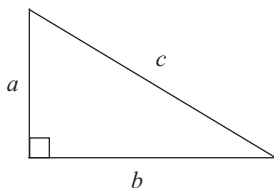


Рис. 2.

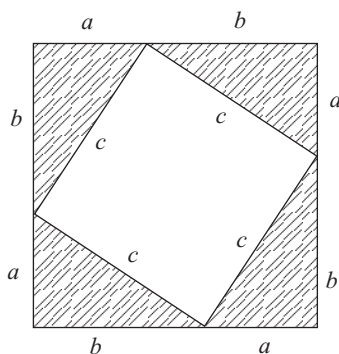


Рис. 3.

ных прямоугольных треугольников, суммарная площадь которых равна $4 \left(\frac{1}{2}ab \right)$. Поэтому имеем

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \left(\frac{1}{2}ab \right).$$

Сравнивая эту формулу и формулу $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, находим

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Еще пример. Для школьника не составляет труда найти выражение площади S круга через радиус R и длину l соответствующей окружности (рис. 4). Поскольку $l = 2\pi R$, а $S = \pi R^2$, то легко получается: $S = \frac{l}{2}R$.

А вот как решал эту задачу древнеиндийский математик Ганеши (чье имя означает *Бог слонов*). Разбивая горизонтальным диаметром круг на два полукруга, он разделял каждый из них на шесть секторов (рис. 5).

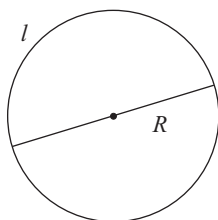


Рис. 4.

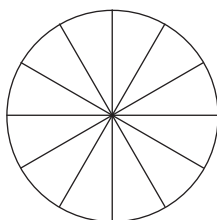


Рис. 5.

Далее, из этих секторов он строил фигуру (рис. 6), напоминающую две пилы, соединенные зубьями, и *похожую* на прямоугольник с основанием $a = \frac{l}{2}$ и высотой $h = R$. Принимая его площадь $S = ah$ за площадь круга, он получал требуемую формулу $S = lR/2$. Над этим чертежом Ганеши написал единственное слово:

Смотри!

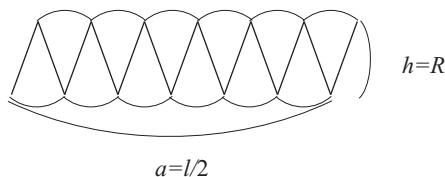


Рис. 6.

Здесь *истинность* высказывания достигается исключительно *наглядностью*. Хотя для строгого обоснования математических истин этого недостаточно, но геометрические иллюстрации часто оказываются полезными для интерпретации, а иногда и для обнаружения математических закономерностей.

§ 3. Действительная числовая ось и система координат на плоскости — синтез алгебры и геометрии

Итак, на первых порах (в историческом ракурсе) соотношение между геометрией и алгеброй было таково, что, условно говоря, геометрия «подпытывала» алгебру. Однако положение изменилось со времен Рене Декарта (XVII век), когда алгебра «начала отдавать долги». С этого момента на службу геометрии были привлечены новые алгебраические методы. Вкратце напомним суть дела, в основном известную из курса школьной математики.

Действительная числовая ось

На прямой зададим направление (слева направо), точку O (начало отсчета) и единичный отрезок (масштаб) (рис. 7).



Рис. 7.

Прямая, обладающая перечисленными свойствами, называется *действительной числовой осью*.

Действительная числовая ось реализует взаимно-однозначное соответствие между множеством точек прямой и множеством действительных чисел $\{M\} \Leftrightarrow \mathbb{R}$ в том смысле, что каждому числу $x \in \mathbb{R}$ соответствует некоторая точка M числовой оси и, наоборот, каждой точке M числовой оси ставится в соответствие число $x \in \mathbb{R}$, являющееся ее координатой на этой числовой оси. Записывают: $M(x)$.

Положительная координата x выражает расстояние d от точки M до начала координат: $d = x$. Если координата отрицательная, то $d = -x$.

В этой связи напомним понятие *модуля* действительного числа:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, геометрический смысл модуля числа x в обоих случаях заключается в том, что он выражает расстояние от точки M до начала координат.

Для двух точек $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, лежащих на числовой оси (рис. 8), можно определить расстояние между ними по формуле

$$d(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|$$

и координату точки M_0 , которая делит пополам отрезок M_1M_2 , по формуле:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

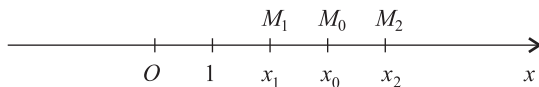


Рис. 8.

Читателю предлагается самостоятельно убедиться в справедливости обеих формул при любом расположении данных точек на оси.

Система декартовых прямоугольных координат на плоскости

Две взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом отсчета и одинаковым масштабом образуют *декартову прямоугольную систему координат на плоскости*. Одну из осей, называемую осью *абсцисс*, обычно проводят горизонтально и обозначают Ox . Другую ось, называемую осью *ординат*, проводят вертикально и обозначают Oy (рис. 9).

Точка пересечения осей координат (т. O) называется *началом координат*. Стрелки указывают направления на каждой из осей координат.

Плоскость, на которой задана декартова прямоугольная система координат, называется *координатной плоскостью*.

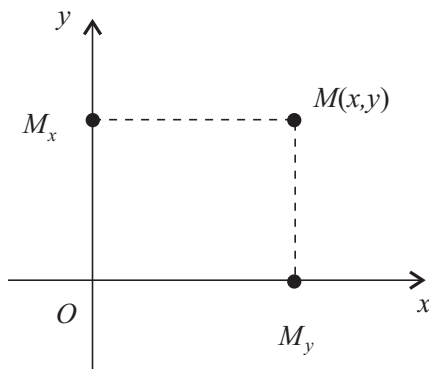


Рис. 9.

Каждой точке координатной плоскости ставится в соответствие пара чисел, называемых *координатами* этой точки. Пусть M_x и M_y — ортогональные (прямоугольные) проекции точки M соответственно на ось абсцисс и на ось ординат. Точка M_x на оси Ox , имеет координату x , а точка M_y на оси Oy , имеет координату y . Положение каждой точки M плоскости можно описать парой ее декартовых координат, что выражается записью: $M(x, y)$.

Обратно, каждой *упорядоченной* паре чисел (x, y) соответствует единственная точка M координатной плоскости xOy , для которой эти числа являются координатами. Запись $\{M\} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \{(x, y)\}$ выражает взаимно однозначное соответствие между множеством точек координатной плоскости и множеством упорядоченных пар действительных чисел, устанавливаемое декартовой прямоугольной системой координат xOy .

Вопросы для самопроверки

1. Назовите известные вам числовые множества. Какие арифметические действия можно выполнять на перечисленных числовых множествах?
2. Какие арифметические действия можно выполнять на отрезке $[0,1]$?
3. Как реализуется на прямой линии взаимно однозначное соответствие между множеством ее точек и множеством действительных чисел?
4. Что называется модулем действительного числа? Каков геометрический смысл модуля числа?
5. Как определяется расстояние между двумя точками на числовой оси?
6. Чему равна координата точки, равноудаленной от двух заданных точек числовой оси?
7. Как определяется с помощью действительных чисел положение точки на плоскости в системе декартовых прямоугольных координат?
8. Чему равны расстояния точки $M(x, y)$ от координатных осей, если она находится во втором квадранте?

Задания для аудиторной и домашней работы

1. Выполнить действия.

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{3a-5b}{a^2-b^2} - \frac{4}{a+b}; & 3) \sqrt[3]{a^3+b^3+3ab(a+b)}; \\ 2) \sqrt{(x+1)^2 - (2x+1)}; & 4) \sqrt[3]{a^3-b^3-3ab(a-b)}. \end{array}$$

2. Решить уравнения и указать на оси Ox точки, соответствующие их корням.

$$\begin{array}{ll} 1) 3x - 14 = 4; & 6) \frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2; \\ 2) x^2 - \frac{1}{4} = 0; & 7) \sqrt{x-2} = 0; \\ 3) x^2 + x = 0; & 8) \sqrt[3]{x+2} = 3; \\ 4) x^2 + x + \frac{1}{4} = 0; & 9) \sqrt{x+6} = x; \\ 5) \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 = 0; & 10) |x-5| = 7. \end{array}$$

3. Решить неравенства и указать на оси Ox множества точек, соответствующие их решениям.

- | | |
|-----------------------------|------------------------------------|
| 1) $5x - 10 > 15;$ | 8) $ x < 1;$ |
| 2) $x^2 - x < 0;$ | 9) $ x \geq 1;$ |
| 3) $\frac{6x-3}{2} \geq x;$ | 10) $ x-5 \leq 7;$ |
| 4) $\frac{6x-3}{x} \geq 2;$ | 11) $\sqrt{x-4} < 6;$ |
| 5) $x^2 - 4 < 0;$ | 12) $\sqrt{x-2} > -2;$ |
| 6) $x^2 - 4 \geq 0;$ | 13) $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} > 0;$ |
| 7) $x^2 + 5x + 6 > 0;$ | 14) $\frac{x^3-x}{x^2+1} > 0.$ |

4. Построить точки на плоскости xOy по их координатам.

$A(0, 1), B(-2, 0), C(2, 3), D(-2, 3), E(-2, -3), F(2, -3),$
 $G(\frac{3}{2}, -1), H(0, \sqrt{2}), I(-\sqrt{3}, 0), K(\sqrt{2}, \sqrt{3}), L(\pi, 0),$
 $M(\pi, -1), N(-2\pi, 0), P(1, \frac{\pi}{2}).$

5. Доказать следующие алгебраические соотношения геометрически.

- 1) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$
- 2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$
- 3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Задания для индивидуальной домашней работы № 1

В каждом задании N — номер вашего варианта.

1. Выполнить действия.

- 1) $\frac{N}{N-2} - \frac{N^2+4}{N^2-4};$
- 2) $\sqrt{(x+N)^2 - N(2x+N)};$
- 3) $(N + \sqrt{2N})(N - \sqrt{2N}) + 1.$

2. Решить уравнения и указать на оси Ox точки, соответствующие их корням.

1) $3x - N = 17;$	5) $x^2 - (N + 2)x + 2N = 0;$
2) $ x - N = 4;$	6) $Nx^2 + (N + 1)x + 1 = 0;$
3) $\sqrt{x + N} = 6;$	7) $Nx + 5 = \log_2 32;$
4) $\sqrt{x + N} = x;$	8) $\frac{x}{N} = 2 \sin \frac{\pi}{6}.$

3. Решить неравенства и указать на оси Ox множества точек, соответствующие их решениям.

1) $3x - 2N > N - 3;$	5) $ x > 2N;$
2) $x^2 > N;$	6) $\sqrt{x} < 2N;$
3) $(x - 1)(x + N) < 0;$	7) $\sqrt{x + N} < 5;$
4) $(x - 1)(x + N) \geq 0;$	8) $ x - N \leq 7.$

4. Построить точки на плоскости xOy по их координатам.

1) $M_1(N, 3); M_2(-4, \frac{N}{2}); M_3(N - 10, N - 10); M_4(0, \frac{N}{3});$
 $M_5(\frac{2N}{3}, 0);$
2) $Nx > 5;$ 3) $\frac{y}{N} \leq 2;$ 4) $y < Nx;$ 5) $y + x > N.$

Глава 2

АЛГЕБРА: СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Поверил я алгеброй гармонию.

А. Пушкин, «Моцарт и Сальери»

Я понял, что история культуры есть цепь уравнений в образах, попарно связывающих очередное неизвестное с известным, причем этим известным, постоянным для всего ряда, является легенда, заложенная в основании традиции, неизвестным же, каждый раз новым — актуальный момент текущей культуры.

Б. Пастернак, «Охранная грамота»

Как «кирпичики» при строительстве домов, как «клетки» для живого организма, так в алгебре в качестве исходного «строительного материала» используются числа — элементы рассмотренных в главе 1 числовых множеств. За буквенными обозначениями, с которыми мы будем встречаться в дальнейшем, скрываются известные или неизвестные числа. Познакомившись с числовыми множествами, перейдем к основному, фундаментальному понятию алгебры — *уравнению*, важнейшей, если воспользоваться вышеприведенной аналогией, алгебраической «строительной конструкцией».

В течение длительного времени (на протяжении столетий и даже тысячелетий!) уравнения являлись предметом пристального внимания со стороны многих поколений математиков Европы и Востока. Это объясняется не только чисто научным интересом, который вызывают уравнения у профессиональных математиков, но и широкой сферой приложения уравнений к самым разнообразным задачам прикладного характера из различных областей знаний.

Напомним, что *уравнением* называется равенство, содержащее, по крайней мере, одно неизвестное (обычно обозначаемое буквой x ; незнакомцев часто называют *Мистер Икс*). Известные в задаче величины обычно обозначают начальными буквами латинского алфавита: a , b , c ...

§ 1. Линейные уравнения

Уравнение называется *линейным*, если оно содержит неизвестное только в первой степени. Для того, чтобы уравнение с одним неизвестным сводилось к линейному, необходимо, чтобы после тождественных преобразований (приведение подобных членов, избавление от общего знаменателя в обеих частях уравнения и т. д.) оно принимало следующий вид:

$$ax = b$$

(иногда пишут: $ax + b = 0$).

Здесь a и b считаются известными действительными числами ($a, b \in \mathbb{R}$), а x — неизвестное. Числовое значение неизвестного x , удовлетворяющее данному уравнению, называется его *решением* (или *корнем*); решить уравнение — это значит найти все его решения или показать, что данное уравнение не имеет решений (сказанное относится не только к линейным, а к любым уравнениям).

Напомним о принципиально разных исходах, возможных при различных значениях коэффициента a и свободного члена b в уравнении $ax = b$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$ будет *единственным решением* уравнения.

2. Если $a = 0$, то имеем уравнение: $0 \cdot x = b$. Сделаем предположения относительно b .

а) Если $b = 0$, то решением уравнения $0 \cdot x = 0$ является любое действительное число. Это уравнение имеет *бесконечное множество решений*.

б) Если $b \neq 0$, то уравнение $0 \cdot x = b$ *не имеет решений*, так как ему не удовлетворяет ни одно действительное число. Например, уравнение $0 \cdot x = 3$ решений не имеет.

Этими случаями в общих чертах исчерпывается теория линейных уравнений с одним неизвестным. Уравнение может усложняться по двум направлениям.

1) Сохраняя одно неизвестное x , переходят к *нелинейным* уравнениям второй, третьей или более высокой (натуральной)

степени относительно x . В нашем курсе такие уравнения подробно изучаться не будут. Напомним, что квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

при условии, что *дискриминант* D неотрицательный

$$D = b^2 - 4ac \geq 0,$$

имеет два действительных корня, которые находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(при $D = 0$ корни равные: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$).

2) Другое возможное усложнение состоит в том, что увеличивают число неизвестных и число уравнений, сохраняя при этом линейность относительно каждого неизвестного, то есть переходят к *системам линейных уравнений* с двумя и более неизвестными.

§ 2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса

А. В качестве примера рассмотрим систему трех уравнений с двумя неизвестными x, y :

$$\begin{cases} x + 2y = 10, & \text{(I)} \\ 2x + 3y = 17, & \text{(II)} \\ 4x - y = 13. & \text{(III)} \end{cases}$$

Решением системы уравнений называется упорядоченная пара чисел (x, y) , которая обращает каждое уравнение системы в числовое равенство (тождество). Проверка показывает, что упорядоченная пара $(4, 3)$, то есть $x = 4, y = 3$, является решением данной системы.

Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*.

Решить систему — это значит найти все ее решения или показать, что система не имеет решений (в этом случае ее называют *несовместной*).

Для решения систем линейных уравнений существует много различных приемов. Применим *метод Гаусса*, преобразующий данную систему в более простую. *На первом шаге*, сохранив неизменным первое уравнение, используем его для преобразования второго и третьего уравнения таким образом, чтобы в них исчезло неизвестное x . С этой целью из второго уравнения

вычитаем почленно первое уравнение, умноженное на 2, а из третьего — первое уравнение, умноженное на 4. Получаем

$$\begin{cases} x + 2y = 10, & \text{(I)} \\ -y = -3, & \text{(II)} - 2(\text{I}) = (\text{II}') \\ -9y = -27 & \text{(III)} - 4(\text{I}) = (\text{III}') \end{cases}$$

(справа схематично указаны выполненные преобразования).

Затем — *на втором шаге* — используя новое второе уравнение (II'), преобразуем новое третье уравнение (III') так, чтобы в нем исчезло y . Получаем

$$\begin{cases} x + 2y = 10, & \text{(I)} \\ -y = -3, & \text{(II')} \\ 0 = 0. & \text{(III')} - 9(\text{II}') = (\text{III'')}\end{cases}$$

Отбросив последнее уравнение как *тривиальное* ($0 = 0$), получаем *треугольную* систему

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 10, \\ -y = -3. \end{array} \right.$$

Из второго уравнения находим: $y = 3$. Подставив это значение в первое уравнение, получаем

$$x + 2 \cdot 3 = 10,$$

откуда $x = 10 - 6 = 4$.

Полученная упорядоченная пара (4; 3) уже была испытана в качестве решения. Мы убедились в том, что это решение единственное.

Приведем еще несколько примеров.

Пример 1.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x + 3y = -2, & \text{(I)} \\ 3x + 4y = -1. & \text{(II)} \end{cases}$$

Применяя метод Гаусса, преобразуем второе уравнение, вычитая из него первое уравнение, умноженное на 3:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y = -2, & \text{(I)} \\ -5y = 5. & \text{(II)} - 3(\text{I}) \end{array} \right.$$

Получили систему треугольного вида. Из последнего уравнения заключаем, что $y = -1$. Подставляя это значение в первое уравнение, находим x :

$$x = -2 - 3(-1) = 1.$$

Таким образом, найдено единственное решение системы

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Пример 2.

Применяя метод Гаусса к системе

$$\begin{cases} x + 2y = 10, & \text{(I)} \\ 3x + 6y = 30, & \text{(II)} \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} x + 2y = 10, & \text{(I)} \\ 0 = 0. & \text{(II)} - 3(\text{I}) \end{cases}$$

После удаления второго — тривиального — уравнения остается одно уравнение с двумя неизвестными. В этом примере исходная система имеет бесконечное множество решений. Чтобы найти *общее* решение системы, надо одно из неизвестных, *главное*, выразить через другое — *свободное*.

Пусть x — главное неизвестное, а y — свободное неизвестное. В этом случае *общее решение системы* записывается следующим образом:

$$\begin{cases} x = 10 - 2y, \\ y \in R. \end{cases}$$

Чтобы найти какое-нибудь *частное решение*, следует свободному неизвестному придать определенное числовое значение. Например, полагая $y = 1$, находим $x = 8$. Таким образом, $(8; 1)$ — частное решение системы.

Пример 3.

Применив метод Гаусса к системе

$$\begin{cases} x + 2y = 10, & \text{(I)} \\ 3x + 6y = 35, & \text{(II)} \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} x + 2y = 10, & \text{(I)} \\ 0 = 5. & \text{(II)} - 3(\text{I}) \end{cases}$$

Полученное числовое «равенство» не удовлетворяется ни при каких значениях x и y . Поэтому решений у исходной системы нет и она является несовместной.

Рассмотренные три примера исчерпывают все принципиально различные случаи решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Применяя метод Гаусса к системе *общего вида*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

можно убедиться, что имеет место один из трех возможных исходов.

I. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное

множество решений.

II. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система несовместна.

III. Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение.

В. Метод Гаусса позволяет решать системы и с большим числом уравнений и неизвестных. Приведем примеры систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными (справа по-прежнему будем указывать выполняемые преобразования). *Решением* системы уравнений с тремя неизвестными называется упорядоченная тройка чисел (x, y, z) , которая обращает каждое из уравнений системы в числовое равенство (тождество).

Пример 4.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y + z = 2, & \text{(I)} \\ 2x + 3y - z = 0, & \text{(II)} \\ 3x + 5y + 7z = 8. & \text{(III)} \end{cases} <=> \\ & <=> \begin{cases} x + y + z = 2, & \text{(I)} \\ y - 3z = -4, & \text{(II)} - 2(\text{I}) \\ 2y + 4z = 2. & \text{(III)} - 3(\text{I}) \end{cases} <=> \\ & <=> \begin{cases} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2, \\ y - 3z = -4, \\ 10z = 10. \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II')} \\ \text{(III')} - 2(\text{II'})} \end{array} \end{cases} \end{aligned}$$

Полученная система имеет треугольный вид. Из последнего уравнения находим $z = 1$, затем из предпоследнего определяем $y = -4 + 3 = -1$ и, наконец, из первого находим $x = 2 - 1 + 1 = 2$. Получили единственное решение: $(2; -1; 1)$.

Пример 5.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y + z = 2, & \text{(I)} \\ 2x + 3y - z = 0, & \text{(II)} \\ 3x + 4y = 3. & \text{(III)} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 & \text{(I)} \\ y - 3z = -4 & \text{(II)} - 2\text{(I)} \\ y - 3z = -3. & \text{(III)} - 3\text{(I)} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2, & \text{(I)} \\ y - 3z = -4, & \text{(II')} \\ 0 = 1. & \text{(III')} - \text{(II')} \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку третье соотношение в последней системе фактически является неравенством, то исходная система уравнений несовместна, т. е. решений нет.

Пример 6.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y + z = 2, & \text{(I)} \\ 2x + 3y - z = 0, & \text{(II)} \\ 3x + 4y = 2. & \text{(III)} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2, & \text{(I)} \\ y - 3z = -4, & \text{(II)} - 2\text{(I)} \\ y - 3z = -4. & \text{(III)} - 3\text{(I)} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} x + y + z = 2, \\ y - 3z = -4, \end{matrix}} & \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II')} \end{matrix} \\ 0 = 0. & \text{(III')} - \text{(II')} \end{cases} \end{aligned}$$

После преобразований получаем *трапецидальный* вид системы линейных уравнений. В этом случае система имеет бесконечное множество решений. Пусть z — *свободное* неизвестное, а x, y — *главные* неизвестные. Последовательно выражая главные неизвестные через свободные, найдем общее решение. Из второго уравнения получаем: $y = 3z - 4$; подставляя это выражение в первое уравнение, находим: $x = 2 - y - z = 2 - 3z + 4 - z = 6 - 4z$. Таким образом, общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = -4z + 6, \\ y = 3z - 4, \\ z \in R. \end{cases}$$

Найдем одно из частных решений. Например, полагая $z = 1$, из общего решения находим: $x = 2, y = -1$. Таким образом, частное решение: $(2, -1, 1)$.

Рассмотренные три примера исчерпывают все принципиально возможные случаи решения систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

С. Вернемся к системам двух уравнений *общего вида* с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & \text{(I)} \\ a_2x + b_2y = c_2, & \text{(II)} \end{cases}$$

и предположим, что коэффициенты при неизвестных непропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

В этом случае метод Гаусса гарантирует, что система уравнений имеет единственное решение. Получим формулы, определяющие это решение через коэффициенты и свободные члены данных уравнений.

Полагая, что $a_1 \neq 0$, преобразуем второе уравнение:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & \text{(I)} \\ (a_1b_2 - b_1a_2)y = a_1c_2 - c_1a_2. & a_1(\text{II}) - a_2(\text{I}) \end{cases}$$

Поскольку в силу предположения о непропорциональности коэффициентов имеем $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, то из второго уравнения можно определить y :

$$y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}.$$

Исходную систему уравнений можно преобразовать по-другому:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & \text{(I)} \\ (a_1b_2 - b_1a_2)x = c_1b_2 - b_1c_2. & -b_1(\text{II}) + b_2(\text{I}) \end{cases}$$

На этот раз из нового второго уравнения найдем x :

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}.$$

Для запоминания полученных формул используем важное в алгебре и ее приложениях понятие определителя.

§ 3. Определители. Правило Крамера

Определителем (детерминантом) второго порядка называется число, которое вычисляется из таблицы (называемой мат-

рицей), состоящей из четырех чисел, расположенных в двух строках и двух столбцах, по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 4 \cdot 8 = 3 - 32 = -29,$$

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 3 \\ 3/2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 5 - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{4}{2} = -2.$$

Обратим внимание на то, что в выражении определителя сомножителями в каждом из произведений служат числа, стоящие в *разных* строках и в *разных* столбцах.

Используем определители второго порядка для выражения решения рассмотренной системы линейных уравнений общего вида. Имеем

$$a_1b_2 - b_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad c_1b_2 - b_1c_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$a_1c_2 - c_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Поэтому, $x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$

Вводя обозначения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(Δ — греческая буква *дельта*), полученным выше формулам можно придать следующий вид:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Существенно, что *главный определитель* Δ должен быть отличен от нуля: $\Delta \neq 0$.

Полученные формулы носят названия *правила Крамера* для решения системы линейных уравнений.

Пример 7.

Применяя правило Крамера, решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 10, \\ 2x + 3y = 17. \end{cases}$$

Прежде всего вычислим отмеченные выше определители второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 17 & 3 \end{vmatrix} = 30 - 34 = -4,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 17 \end{vmatrix} = 17 - 20 = -3.$$

Далее, по правилу Крамера, получаем

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-4}{-1} = 4, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

В курсах линейной алгебры наряду с определителями второго порядка рассматриваются определители третьего и более высоких порядков. Не вникая в подробности, покажем, как *раскрывается* определитель третьего порядка

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \\ &= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что в каждое произведение, состоящее из трех сомножителей, входят числа из *разных* строк и *разных* столбцов.

Определители третьего порядка применяются при решении систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3. \end{cases}$$

В этом случае (при $\Delta \neq 0$) правило Крамера выражается следующими формулами:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Определители в числителях получаются из определителя Δ заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Определители обладают рядом замечательных свойств (они приводятся в учебниках по линейной алгебре). Например: определитель не изменится, если из любой его строки вычесть почленно другую строку, умноженную на произвольное число.

В заключение отметим, что изложенная в этой главе теория находит самые разнообразные применения в математике и ее многочисленных приложениях. В следующей главе она применяется в задачах аналитической геометрии.

Вопросы для самопроверки

1. Какое уравнение называется линейным?
2. Что называется решением уравнения с одним неизвестным?
3. Приведите примеры линейных уравнений, имеющих:
а) единственное решение; б) бесконечное множество решений; в) не имеющих ни одного решения.
4. Напишите формулу для решения квадратного уравнения.
5. При каком соотношении между коэффициентами квадратное уравнение не имеет действительных корней?
6. Что называется решением системы линейных уравнений с двумя неизвестными? С тремя неизвестными?
7. Как вы понимаете задание: «Решить систему уравнений»?
8. Приведите примеры систем линейных уравнений (с двумя или тремя неизвестными), имеющих: а) единственное решение; б) бесконечное множество решений; в) не имеющих ни одного решения.
9. В чем заключается метод Гаусса для решения систем линейных уравнений?
10. Всякую ли систему линейных уравнений можно решить методом Гаусса?

11. Что называется определителем 2-го порядка?
12. Напишите формулы Крамера для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.
13. В каких случаях можно и в каких случаях нельзя применять правило Крамера? Приведите примеры.
14. Что называется определителем 3-го порядка?
15. Напишите формулы Крамера для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Задания для аудиторной и домашней работы

1. Решить системы уравнений методом Гаусса.

$$1) \quad \begin{cases} x - 3y = -5, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$$

$$6) \quad \begin{cases} x + 3y = -2, \\ -2x - 6y = 5; \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} x + 3y = 0, \\ -3x - 6y = 0; \end{cases}$$

$$7) \quad \begin{cases} x + 7y = 10, \\ 3x - 4y = 5, \\ x - y = 2; \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} x - 2y = 7, \\ -2x + 4y = -9; \end{cases}$$

$$8) \quad \begin{cases} x + 3y = -1, \\ 2x - 5y = 9, \\ -3x - 2y = -4; \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} x + 3y = 4, \\ 3x + 9y = 12; \end{cases}$$

$$9) \quad \begin{cases} 3x + 2y = 2, \\ 2x - y = -1, \\ -x + 3y = 2; \end{cases}$$

$$5) \quad \begin{cases} x + 5y = 6, \\ -3x - 15y = 2; \end{cases}$$

$$10) \quad \begin{cases} x + 2y = -1, \\ 2x - 5y = 9, \\ -x + 7y = -10. \end{cases}$$

2. Исследовать системы уравнений в зависимости от *параметра* a .

$$1) \quad \begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = 1; \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = a. \end{cases}$$

3. Решить системы уравнений методом Гаусса.

$$1) \quad \begin{cases} x - y + 4z = 5, \\ 5x + y + 2z = 7, \\ 2x + 3y - z = 1; \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} x - y + z = 1, \\ 3x + 5y + z = 9, \\ x - 7y + 4z = -2. \end{cases}$$

4. Исследовать системы уравнений в зависимости от параметра a .

$$1) \begin{cases} x + y + az = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ ax + y + z = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y + az = 1, \\ x + ay + z = a, \\ ax + y + z = a^2. \end{cases}$$

5. Вычислить определители второго порядка.

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & \operatorname{tg} \beta \\ \operatorname{ctg} \beta & \operatorname{ctg} \alpha \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{3} - 1 \\ \sqrt{3} + 1 & \sqrt{5} \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} (a - b) & (c + d) \\ (c - d) & (a + b) \end{vmatrix}.$$

6. Вычислить определители третьего порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix};$$

$$7) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 7 & 49 \end{vmatrix}; \quad 8) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}; \quad 9) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin^2 \alpha & \sin^2 \beta & \sin^2 \gamma \\ \cos^2 \alpha & \cos^2 \beta & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}.$$

7. Решить системы уравнений по правилу Крамера.

$$1) \begin{cases} x + 4y = 6, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} -3x + 2y = 0, \\ 4x - 5y = 0. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -3x + 4y = -13, \\ x - 3y = 1; \end{cases}$$

8. Решить системы уравнений по правилу Крамера.

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ 5x + y + 2z = 7, \\ x - y + 4z = 5; \end{cases} & 3) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 6; \end{cases} \\ 2) \quad \begin{cases} x - y + z = 1, \\ 3x + 5y + z = 9, \\ x - 7y + 4z = -2; \end{cases} & 4) \quad \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases} \end{array}$$

9. С помощью метода Гаусса найти многочлены $f(x) = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$1) f(-1) = 1, f(1) = 3, f(5) = 31;$$

$$2) f(-4) = -1, f(4) = -1, f(5) = 8;$$

$$3) f(-1) = 0, f(1) = 4, f(2) = 15;$$

$$4) f(1) = 3, f(3) = 7, f(-4) = -7.$$

Задания для индивидуальной домашней работы № 2

В каждом задании N — номер вашего варианта.

1. Вычислить определители:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \begin{vmatrix} N & 3 \\ N-1 & 5 \end{vmatrix}; & 4) \quad \begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{N} & \sin \frac{\pi}{N} \\ -\sin \frac{\pi}{N} & \cos \frac{\pi}{N} \end{vmatrix}; \\ 2) \quad \begin{vmatrix} 2N^2 & 2 \\ 4N - \frac{1}{2} & 8 \end{vmatrix}; & 5) \quad \begin{vmatrix} 1 & N & N^2 \\ 1 & -N & N^2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}. \\ 3) \quad \begin{vmatrix} \sqrt{N+3} & \sqrt{N}-3 \\ \sqrt{N}+3 & \sqrt{N+3} \end{vmatrix}; & \end{array}$$

2. Решить систему линейных уравнений с помощью метода Гаусса и, если это возможно, по правилу Крамера. В случае единственного решения сделать проверку. В случае

бесконечного множества решений указать два частных решения.

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \begin{cases} x + 4y = N, \\ 2x + (N - 8)y = 5; \end{cases} & 3) \quad \begin{cases} x - 3y = N, \\ 2x - 6y = 2N. \end{cases} \\ 2) \quad \begin{cases} 6x - y = N, \\ 18x - 3y = 5; \end{cases} & \end{array}$$

3. Решить системы линейных уравнений. В случае бесконечного множества решений указать два частных решения.

$$1) \quad \begin{cases} x - y + 4z = 1, \\ 2x + 3y - z = N, \\ 3x + 2y + 3z = N + 1; \end{cases} \quad 2) \quad \begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ 3x + 5y + z = N, \\ 2x + 6y - z = N + 3. \end{cases}$$

4. Решить не менее двух из следующих систем линейных уравнений (по вашему выбору) по правилу Крамера.

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \begin{cases} 3x - y + 4z = 9, \\ 2x + 3y - z = -5, \\ x - 11y + 5z = 28; \end{cases} & 4) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 6; \end{cases} \\ 2) \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 3, \\ 6x + 2y - z = 13, \\ 2x - y + 4z = 7; \end{cases} & 5) \quad \begin{cases} x + 3y + 7z = 14, \\ 2x - y + 5z = 5, \\ 3x + 2y - z = 6; \end{cases} \\ 3) \quad \begin{cases} 2x - y + 2z = 1, \\ 4x - 7y - z = -18, \\ x + 3y + 3z = 13; \end{cases} & 6) \quad \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ 2x + 3y - 4z = 0, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases} \end{array}$$

Глава 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ: ПРЯМАЯ ЛИНИЯ И КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Могущественна геометрия; соединенная с искусством — неодолима.

Еврипид

Из двух равных умов побеждает тот, кто знает геометрию.

Блез Паскаль

Геометрия — древнейшая из наук, этим именем долгие века называлась вся математика. Геометрия была открыта древними египтянами, она возникла при измерении земельных участков и при астрономических наблюдениях. Долгое время она оставалась важнейшим средством познания Вселенной. Наибольший вклад в ее становление и развитие как науки внесли древнегреческие математики: Пифагор, Евклид, Архимед. На протяжении веков геометрия занимала видное место в начальном и университетском образовании, она входила в плоть и кровь образованных людей любых специальностей. Ее изучение требовало больших умственных усилий. Если верить легенде, то удрученный этим обстоятельством египетский царь Птолемей, привыкший к многочисленным привилегиям, однажды спросил Евклида, нет ли более простого пути постижения геометрии, чем тот, который изложен в его «Началах». На это Евклид ему ответил: «В геометрию царского пути нет!» Желанный «облегченный путь» появился лишь в XVII веке, когда традиционная классическая геометрия усилиями Пьера Ферма, Рене Декарта, других ученых того времени была включена в бурно развивавшуюся алгебру. В итоге появилась *аналитическая геометрия* — синтез алгебры и геометрии (о чем отчасти уже шла речь в главе 1).

Формальное описание и определение геометрических объектов в математике является, вообще говоря, далеко не простым делом. Вместе с тем, на интуитивном уровне, как правило, не возникает разночтения в понимании того, что такое *точка*,

отрезок, прямая, окружность и другие линии, встречавшиеся в школьном курсе геометрии. В аналитической геометрии инструментом исследования является *метод координат*.

§ 1. Простейшие задачи

Начнем с того, что построим на плоскости декартову прямоугольную систему координат. После этого каждая точка M плоскости xOy приобретет две координаты: *абсциссу* x и *ординату* y . Говоря, что на плоскости задана некоторая точка M , мы всякий раз будем предполагать, что нам известны ее декартовы координаты: $M(x, y)$.

Задача 1. Простейшая задача, которая возникает при одной заданной точке $M(x, y)$: определить расстояние d от этой точки до начала координат (рис. 1).

Эта задача решается по теореме Пифагора:

$$d(M, O) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Задача 2. При заданных двух точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определить расстояние между ними (рис. 2).

Эта задача также решается по теореме Пифагора:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Примечание. Эта же формула выражает длину отрезка M_1M_2 .

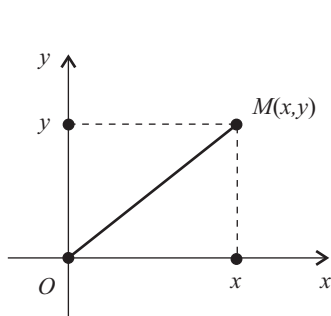


Рис. 1.

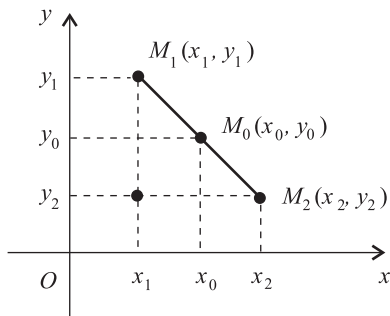


Рис. 2.

Задача 3. Найти координаты (x_0, y_0) точки M_0 , которая делит отрезок M_1M_2 пополам (рис. 2). Рассматривая проекции

точки M_0 на оси Ox и Oy , легко находим:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Более содержательные задачи появляются при рассмотрении бесконечного множества точек, расположенных на какой-нибудь *линии*. Возникает вопрос о том, каким условиям отвечают координаты точек этой линии. Выскажемся более точно: какому они удовлетворяют уравнению? Возможна и обратная задача: задано некоторое уравнение, связывающее абсциссу x и ординату y , — требуется определить *геометрический образ* этого уравнения и начертить соответствующую линию, точки которой имеют координаты, удовлетворяющие этому уравнению. Начнем с первой задачи: по заданной линии найти ее уравнение.

§ 2. Различные виды уравнений прямой

Наиболее простая линия — *прямая*.

А. Рассмотрим различные виды уравнений прямой в зависимости от ее расположения и способа задания в системе координат xOy . Сами оси координат задаются следующими уравнениями: $y = 0$ (ось Ox), $x = 0$ (ось Oy).

1. Через каждую точку плоскости xOy проходят две прямые, параллельные осям координат (рис. 3). Эти прямые называются координатными линиями и их уравнения имеют вид

$$x = a, \quad y = b, \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

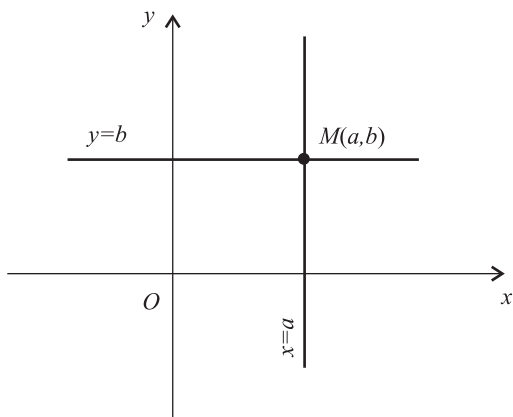


Рис. 3.

2. На рис. 4 изображена прямая l , проходящая через начало координат и образующая с положительным направлением оси Ox острый угол α :

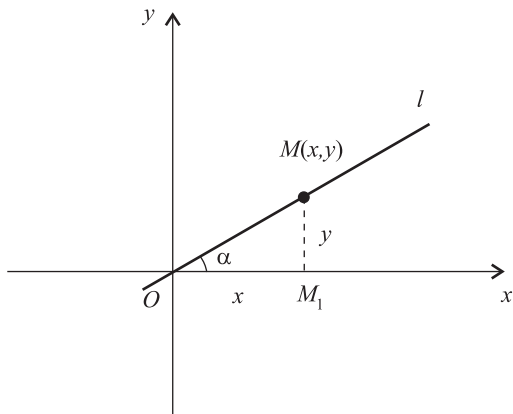


Рис. 4.

Поскольку тангенс угла α в прямоугольном треугольнике OMM_1 равен отношению противолежащего катета к прилежащему, то нетрудно увидеть, что для *любой* точки $M(x, y)$ прямой l ее координаты связаны соотношением

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, это отношение для всех точек прямой l одно и то же, его называют *угловым коэффициентом* прямой и обозначают k . *Уравнение прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом k , принимает следующий вид:*

$$y = kx.$$

Аналогичный вид имеет уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей *тупой* угол с положительным направлением оси Ox . На рис. 5 построены три прямые, которые проходят через начало координат и имеют разные угловые коэффициенты: $k = 1$, $k = 2$, $k = -2$.

3. Прямая l *общего положения* получается из прямой l_0 , проходящей через начало координат, параллельным переносом на высоту b вдоль оси Oy (рис. 6).

Из треугольника OM_0M_1 следует соотношение $\frac{y-b}{x} = k$,

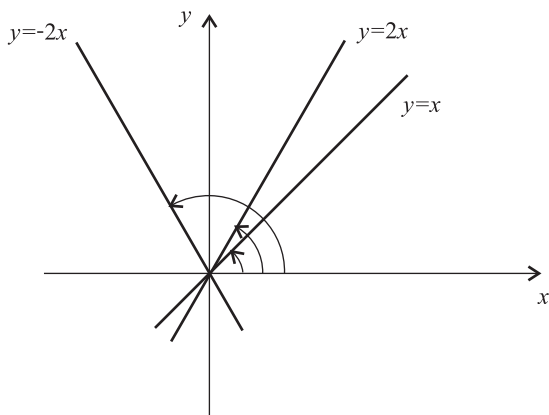


Рис. 5.

которое приводит к следующему уравнению прямой l :

$$y = kx + b.$$

Это уравнение прямой с угловым коэффициентом k , которая отсекает на оси Oy отрезок b .

При $b > 0$ прямая l располагается над прямой l_0 , а при $b < 0$ — под прямой l_0 .

4. Если прямая $y = kx + b$ проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, то имеет место тождество

$$y_1 \equiv kx_1 + b.$$

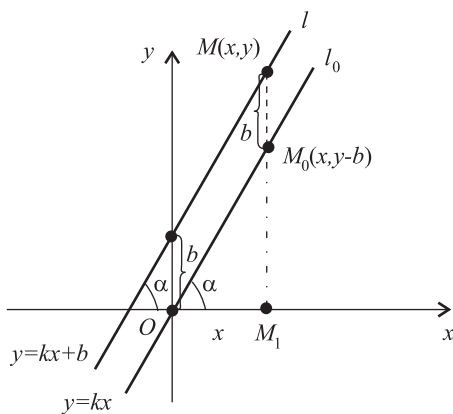


Рис. 6.

Почленное вычитание этого тождества из уравнения прямой приводит к соотношению

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Это уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k , проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$.

5. Как известно, через две точки можно провести прямую и притом только одну. Если, наряду с точкой $M_1(x_1, y_1)$, точка $M_2(x_2, y_2)$ тоже принадлежит прямой l , то ее координаты удовлетворяют условию

$$y_2 - y_1 \equiv k(x_2 - x_1).$$

Разделим уравнение прямой почленно на это тождество:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

6. В частности, если две данные точки лежат на координатных осях, то есть $M_1(a, 0)$, $M_2(0, b)$, то рассматриваемое уравнение после упрощений принимает вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Это уравнение прямой в отрезках.

7. Любое из вышеприведенных уравнений прямой можно привести к следующему виду:

$$Ax + By + C = 0.$$

Это *общее уравнение* прямой. С алгебраической точки зрения это *линейное* уравнение, то есть уравнение *первой степени* относительно двух неизвестных x , y , между тем как A , B , $C \in \mathbb{R}$ — данные числа, определяющие расположение прямой на плоскости xOy .

В. Перечислим задачи, которые можно решать, если заданы прямая l и точка $M_0(x_0, y_0)$.

Задача 1. Принадлежит ли точка M_0 прямой l , заданной уравнением $Ax + By + C = 0$?

Решение.

Подставив координаты x_0 , y_0 данной точки вместо *текущих* координат x , y в левую часть общего уравнения прямой, получаем число $Ax_0 + By_0 + C$. Если оно равно 0, то точка M_0 принадлежит прямой l , а если не равно 0, то не принадлежит. В этом случае точка M_0 удалена от

прямой на некоторое расстояние $d > 0$, которое равно длине перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую l .

Задача 2. Получить формулу для определения расстояния d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l , заданной уравнением: $y = kx + b$ (рис. 7).

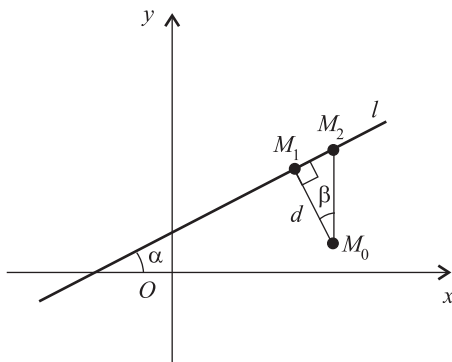


Рис. 7.

Решение.

Искомое расстояние d есть длина катета M_0M_1 прямоугольного треугольника $M_0M_1M_2$ ($M_0M_2 \parallel Oy$). Поэтому

$$d = |M_0M_1| = |M_0M_2| \cos \beta.$$

Поскольку $\beta = \alpha$, то

$$\cos \beta = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

При расположении точки M_0 под прямой l длина гипотенузы равна

$$|M_0M_2| = kx_0 + b - y_0,$$

поэтому в итоге получаем: $d = \frac{kx_0 + b - y_0}{\sqrt{k^2 + 1}}$.

Замечание 1. Понятно, что с учетом *всевозможных* взаимных расположений точки и прямой в числителе появится модуль:

$$d = \frac{|kx_0 + b - y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Замечание 2. Если прямая задается общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то после тождественных преобразований

получаем формулу

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

С. Рассмотрим задачи, относящиеся к трем точкам $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$.

1. Если точки M_1 , M_2 , M_3 лежат на одной прямой l , то выполняется следующее равенство:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Это соотношение можно записать в виде

$$(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

Для лучшего запоминания эту формулу удобно записывать в следующем виде (см. главу 2):

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Равносильность этих формул рекомендуем проверить самостоятельно.

2. Если точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ не лежат на одной прямой, то эти равенства не выполняются. Покажем, что в этом случае площадь треугольника $M_1M_2M_3$ (с точностью до знака) выражается формулой

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

На рис. 8 изображен треугольник $M_1M_2M_3$.

Чтобы применить известную формулу для нахождения площади треугольника: $S = \frac{1}{2} |M_1M_2| d$ (см. рис. 8), определим длину отрезка $|M_1M_2|$ и высоту d треугольника:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$d = d(M_3, l) = \frac{|(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)|}{\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}}.$$

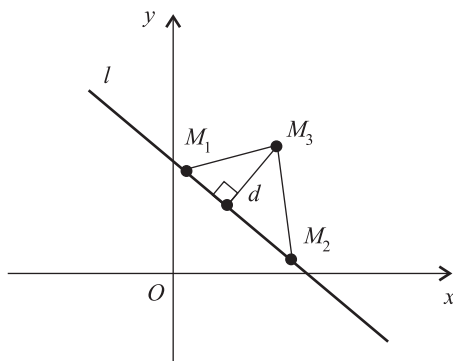


Рис. 8.

Разделив пополам произведение этих выражений, получаем приведенную выше формулу для площади треугольника $M_1M_2M_3$.

D. Рассмотрим взаимное расположение двух прямых l_1 и l_2 , заданных общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Три принципиально различных случая отражены на рис. 9, 10, 11.

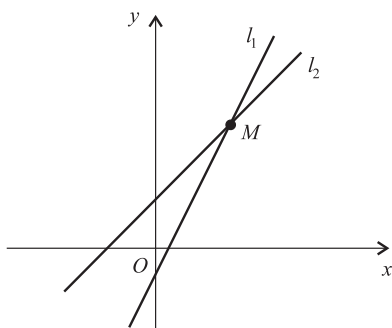


Рис. 9.

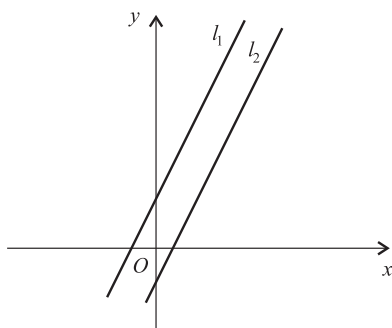


Рис. 10.

Каждый из этих случаев характеризуется определенным алгебраическим условием:

1. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ — прямые пересекаются в некоторой точке M (рис. 9);

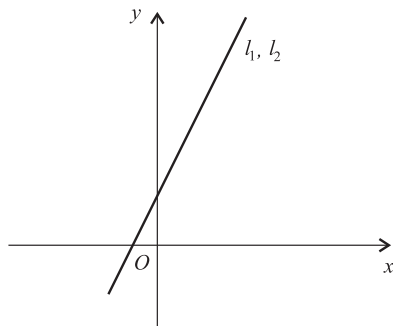


Рис. 11.

2. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ — прямые параллельны (рис. 10);
3. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ — прямые совпадают (рис. 11).

Эти алгебраические выводы следуют из анализа системы двух линейных уравнений, приведенного во второй главе.

Так как геометрическим образом каждого из приведенных уравнений является прямая, то единственность решения системы уравнений означает, что две прямые имеют *единственную общую точку*; несовместность системы уравнений геометрически означает *отсутствие общих точек*, то есть параллельность прямых; бесконечное множество решений системы уравнений означает *бесконечное множество общих точек*, то есть совпадение двух прямых. Геометрия иллюстрирует алгебру, а алгебра интерпретирует геометрию.

Приведем примеры.

Пример 1.

Прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями

$$\begin{cases} 4x - y = 1, \\ 5x - 2y = -1. \end{cases}$$

Поскольку $\frac{4}{5} \neq \frac{-1}{-2}$, то эта система уравнений имеет единственное решение. Найдём его методом Гаусса или по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \end{cases}$$

следовательно, прямые пересекаются в точке $M(1, 3)$.

Пример 2.

Прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями

$$\begin{cases} 4x - y = 1, & \text{(I)} \\ -8x + 2y = 3. & \text{(II)} \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение (как указано справа):

$$\begin{cases} 4x - y = 1, & \text{(I)} \\ 0 = 5. & \text{(II)} + 2(\text{I}) \end{cases}$$

Эта система уравнений не имеет решений, то есть она несовместна. На *алгебраическом языке* можно сказать, что нет ни одной пары чисел (x, y) , которые удовлетворяли бы обоим уравнениям; на *геометрическом языке* это означает, что нет ни одной точки, которая одновременно принадлежала бы обоим прямым; таким образом, прямые l_1 и l_2 параллельны.

В этом примере: $\frac{4}{-8} = \frac{-1}{2} \neq \frac{1}{3}$.

Пример 3.

Прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями

$$\begin{cases} 4x - y = 1, & \text{(I)} \\ -8x + 2y = -2. & \text{(II)} \end{cases}$$

После преобразования (указанного справа) второе уравнение превращается в тождество:

$$\begin{cases} 4x - y = 1, & \text{(I)} \\ 0 = 0. & \text{(II)} + 2(\text{I}) \end{cases}$$

Данная система уравнений имеет бесконечное множество решений, то есть прямые совпадают. Соответствующие коэффициенты и свободные члены в обоих уравнениях пропорциональны:

$$\frac{4}{-8} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}.$$

Е. Приведем (без вывода) следующие важные формулы.

1. Острый угол φ между пересекающимися прямыми l_1 и l_2 , имеющими угловые коэффициенты k_1 и k_2 ($k_1 \neq k_2$), находится по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

2. Условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2 имеет следующий вид:

$$1 + k_1 k_2 = 0.$$

§ 3. Кривые 2-го порядка

Перейдем к линиям, которые задаются уравнениями второй степени.

Окружность

Наряду с прямыми, в школьном курсе геометрии большое внимание уделяется окружностям. Найдем уравнение окружности L , если ее центр помещается в начале координат, а радиус равен числу $R > 0$ (рис. 12).

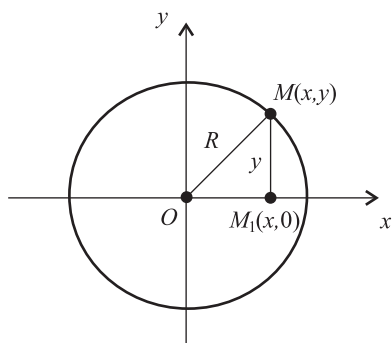


Рис. 12.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка этой окружности и $M_1(x, 0)$ — ее проекция на ось Ox . По теореме Пифагора, примененной к прямоугольному треугольнику OMM_1 , замечаем, что координаты x, y произвольной точки M окружности L удовлетворяют условию:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Это и есть искомое *уравнение окружности*.

Если центр окружности находится в точке $O'(a, b)$, а радиус равен R (рис. 13), то, применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику $O'MM_1$, получаем следующее *уравнение окружности*:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

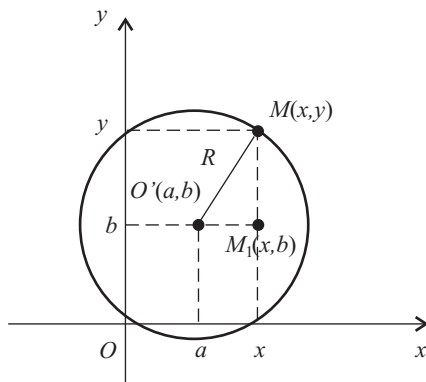


Рис. 13.

Таким образом, любая окружность задается уравнением *второй степени* относительно прямоугольных декартовых координат x, y ; поэтому окружность является *кривой 2-го порядка*.

Рассмотрим некоторые задачи, связанные с окружностями.

Задача 1. Выяснить, проходит ли окружность L , заданная уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Решение.

Подставляя в левую часть уравнения окружности координаты x_0, y_0 вместо текущих координат x, y , получаем число $x_0^2 + y_0^2$. Если $x_0^2 + y_0^2 = R^2$, то точка M_0 лежит на окружности L , если $x_0^2 + y_0^2 < R^2$, то точка M_0 лежит внутри круга, ограниченного этой окружностью, а если $x_0^2 + y_0^2 > R^2$, то точка M_0 лежит вне этого круга.

Кратчайшее расстояние d от точки M_0 до окружности находится по формуле:

$$d = \left| \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - R \right|.$$

Задача 2. Найти точки пересечения окружности L , заданной уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, с прямой l , заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$.

Покажем на примерах, как решается эта задача.

Пример 4.

$$L: x^2 + y^2 = 25, \quad l: 3x - 4y = 0.$$

Разрешим второе уравнение относительно y :

$$y = \frac{3}{4}x.$$

Подставим это выражение в уравнение окружности L . Получим

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 25.$$

Это уравнение имеет *два различных действительных корня*

$$x_1 = -4; \quad x_2 = 4.$$

Далее, для найденных абсцисс из условия $y = \frac{3}{4}x$ определяем ординаты: $y_1 = -3$; $y_2 = 3$.

Таким образом, имеем *две различные точки* пересечения прямой и окружности: $M_1(-4, -3)$, $M_2(4, 3)$ (рис. 14).

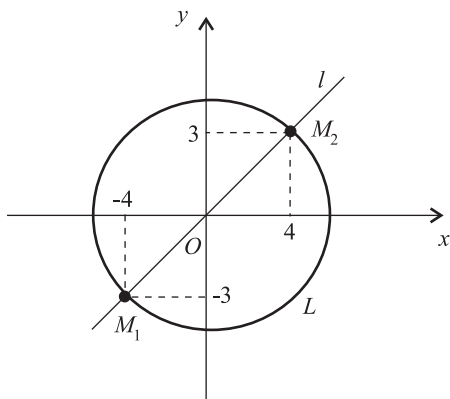


Рис. 14.

Пример 5.

$$L: x^2 + y^2 = 25, \quad l: 3x - 4y + 40 = 0.$$

Уравнение прямой приводится к виду

$$y = \frac{3}{4}x + 10.$$

Подставляя это выражение y в уравнение окружности L

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x + 10\right)^2 = 25,$$

после упрощений получаем

$$5x^2 + 48x + 240 = 0.$$

Так как дискриминант $D = 24^2 - 5 \cdot 240 < 0$, то это уравнение *не имеет (действительных) корней*. Поэтому прямая и окружность *не пересекаются* (рис. 15).

Пример 6.

$$L: x^2 + y^2 = 25, \quad l: 3x - 4y + 25 = 0.$$

Подставляя выражение $y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$, полученное из уравнения прямой l , в уравнение окружности L , после упрощений получаем квадратное уравнение:

$$x^2 + 6x + 9 = 0,$$

имеющее *два совпадающих корня*: $x_1 = x_2 = -3$. Следовательно, окружность и прямая имеют *единственную* общую точку $M_1(-3, 4)$, в которой прямая *касается* окружности (рис. 16).

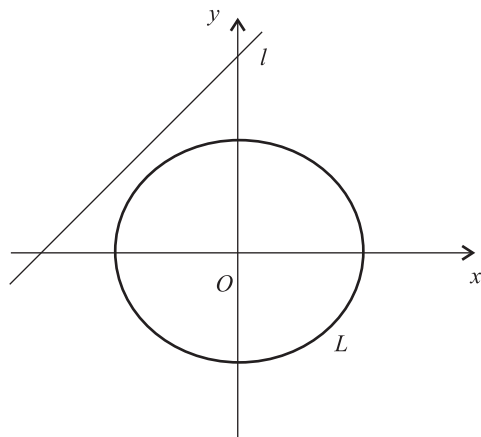


Рис. 15.

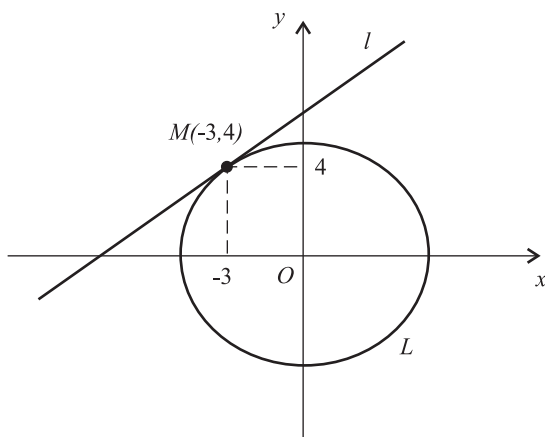


Рис. 16.

Задача 3. Найти прямую l , проходящую через начало координат и касающуюся окружности L , заданной уравнением $(x - 2)^2 + y^2 = 2$.

Решение.

Уравнение искомой прямой ищем в виде: $y = kx$. Определим угловой коэффициент k таким образом, чтобы прямая и окружность имели *единственную* общую точку. Подставив выражение $y = kx$ в уравнение окружности, получаем

$$(x - 2)^2 + (kx)^2 = 2.$$

Тождественными преобразованиями приводим это уравнение к виду

$$(k^2 + 1)x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно x имеет *единственное* решение ($x_2 = x_1$), если дискриминант D равен нулю. Поскольку $D = 2 - 2k^2$, то $D = 0$ при $k = \pm 1$. Таким образом, через начало координат проходят две прямые $y = x$ и $y = -x$, касающиеся данной окружности в точках M_1 и M_2 (рис. 17).

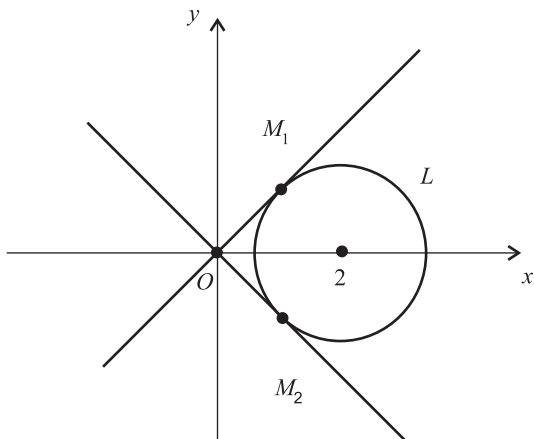


Рис. 17.

Рекомендуем читателю определить самостоятельно координаты точек касания прямых с окружностью и угол, под которым пересекаются касательные.

Эллипс

Изобразим окружность L , заданную, например, уравнением $x^2 + y^2 = 16$ (рис. 18).

Деформируем окружность, подвергнув ее равномерному сжатию вдоль оси Oy , например, в два раза. В результате сжатия окружности получается новая линия L_1 , которая называется *эллипсом* (рис. 19).

При указанном сжатии каждая точка $M(x, y)$ окружности переместится по вертикали в некоторую точку эллипса

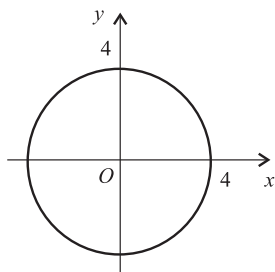


Рис. 18.

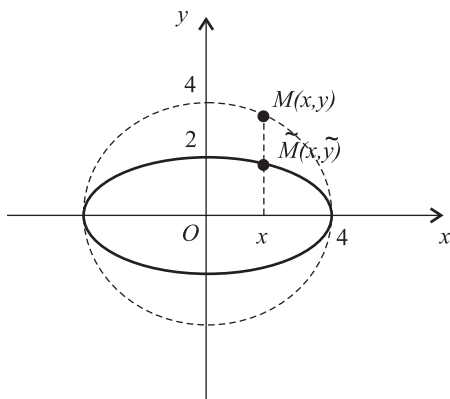


Рис. 19.

$\widetilde{M}(x, \widetilde{y})$ так, что при одинаковых абсциссах x ординаты точек M и $\widetilde{M}$ связаны соотношением

$$y = 2\widetilde{y}.$$

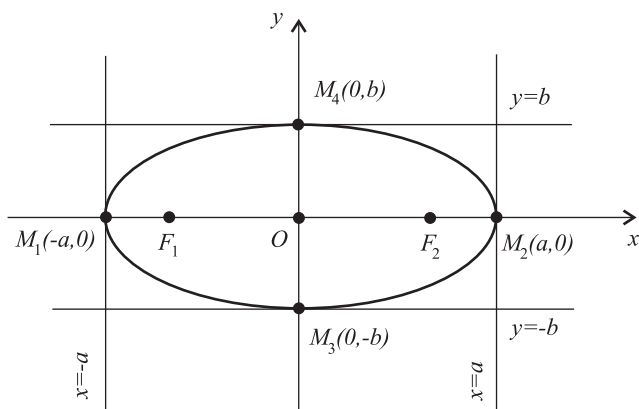


Рис. 20.

Подставив это выражение в уравнение окружности, получаем соотношение, связывающее координаты точек эллипса:

$$x^2 + (2\widetilde{y})^2 = 16,$$

или, после деления обеих частей на 16:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{\widetilde{y}^2}{4} = 1.$$

Отбрасывая «тильду» («волну» $\sim$), то есть обозначая в дальнейшем координаты произвольной точки эллипса просто как x и y , получаем *каноническое* уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Разумеется, любую окружность радиуса a (с уравнением $x^2 + y^2 = a^2$) можно подвергнуть аналогичному сжатию (и не обязательно в два раза). При этом получается эллипс (изображенный на рис. 20), каноническое уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (b < a).$$

Перечислим свойства эллипса.

1. Эллипс располагается в прямоугольнике, ограниченном прямыми: $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$.
2. Оси координат являются *осями симметрии* эллипса.
3. Начало координат — *центр симметрии* эллипса. Эллипс — *центральная кривая второго порядка*.
4. Отрезок, соединяющий две точки эллипса, симметричные относительно центра, называется *диаметром* эллипса. Все диаметры эллипса проходят через его центр, в котором каждый из них делится пополам. В рассматриваемом случае, при $a > b$, горизонтальный диаметр M_1M_2 — наибольший, а вертикальный M_3M_4 — наименьший. Концы этих двух диаметров называются *вершинами* эллипса; координаты вершин: $M_1(-a, 0)$, $M_2(a, 0)$, $M_3(0, -b)$, $M_4(0, b)$.
5. Расстояние от вершины до центра называется *полуосью*. Эллипс имеет две полуоси: *большую*, равную a , и *малую*, равную b .
6. На рис. 20 на горизонтальном диаметре эллипса отмечены две точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$), которые называются *фокусами* эллипса; с ними связано замечательное (определяющее) свойство эллипса: *сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов равна $2a$* .
7. Поскольку эллипс получен сжатием окружности, то окружность является частным случаем эллипса при $b = a$. То есть окружность — это эллипс, у которого большая и малая полуоси равны между собой. В этом случае фокусы совпадают с центром.

Замечание. Эллипсы имеют важные приложения в физике и астрономии.

Физическое свойство фокуса: если в один из фокусов помещен точечный источник света, то отразившись от *эллиптического зеркала*, все лучи соберутся во втором фокусе.

Астрономический аспект выражается законом Кеплера: Земля движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Гипербола

Каноническое уравнение *гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

лишь знаком «минус» отличается от уравнения эллипса. Разумеется, изменение знака может привести к существенным изменениям в форме кривой; с другой стороны, ввиду очевидной «похожести» уравнений некоторые свойства эллипса могут сохраниться. Посмотрим, как обстоит дело в действительности.

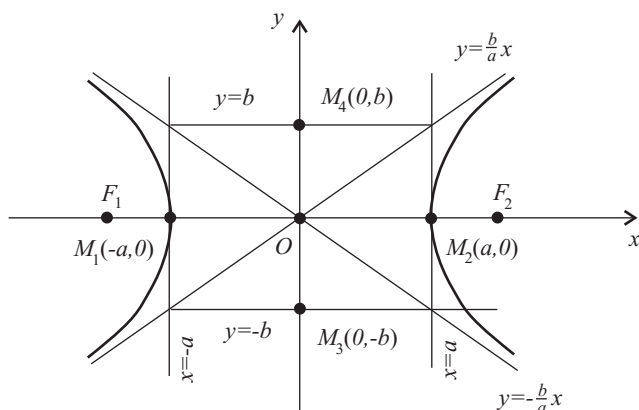


Рис. 21.

Перечислим свойства гиперболы, изображенной на рис. 21.

1. Основной прямоугольник, ограниченный прямыми: $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$ сохраняется, но гипербола располагается *вне* этого прямоугольника. Гипербола — бесконечная кривая, она состоит из двух ветвей — левой и правой.
2. Оси координат являются *осями симметрии* гиперболы.
3. Начало координат — *центр симметрии* гиперболы — *центральная кривая второго порядка*.
4. У гиперболы имеется четыре *вершины* — две *действительных*: $M_1(-a, 0)$, $M_2(a, 0)$, лежащих на гиперболе, и две *мнимых*: $M_3(0, -b)$, $M_4(0, b)$, не лежащих на гиперболе.

5. У гиперболы две *полуоси* — *действительная*, равная a , и *мнимая*, равная b . В случае равенства полуосей гипербола называется *равнобочной*. При этом основной прямоугольник превращается в квадрат.
6. В точках $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ (где $c^2 = a^2 + b^2$) расположены *фокусы* F_1 и F_2 — левый и правый. С фокусами связано определяющее свойство гиперболы: *разность расстояний от любой точки гиперболы до ее фокусов постоянна и равна по модулю $2a$* .
7. Как уже было отмечено, гипербола — бесконечная кривая. При мере удаления точки гиперболы от центра она неограниченно приближается к одной из прямых, которые называются *асимптотами*, — они направлены по диагоналям основного прямоугольника. Уравнения асимптот: $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$.

Замечание. Известное по школьному курсу уравнение $y = k/x$, выражающее *обратно пропорциональную зависимость*, задает равнобочную гиперболу, у которой в роли асимптот выступают оси Ox и Oy , а оси симметрии направлены по биссектрисам координатных углов.

В заключение заметим, что еще одна кривая второго порядка, *парабола*, детально изучается в школьном курсе математики как график квадратного трехчлена.

Вопросы для самопроверки

1. Напишите формулу, выражающую расстояние между двумя точками через их декартовы координаты.
2. Напишите формулы, выражающие координаты середины отрезка через координаты его концов.
3. Напишите уравнения осей координат в системе декартовых координат на плоскости.
4. Какой вид имеют уравнения прямых, параллельных координатным осям?
5. Какой вид имеют уравнения прямых с угловым коэффициентом, проходящих через начало координат? Не проходящих через начало координат?
6. Любая ли прямая может быть задана уравнением: а) с угловым коэффициентом? б) уравнением по двум точкам? в) уравнением в отрезках? г) общим уравнением?
7. Любые ли действительные числа A и B могут быть коэффициентами в общем уравнении прямой?

8. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом?
9. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями?
10. Как найти расстояние от точки до прямой?
11. Как найти расстояние между параллельными прямыми?
12. Как найти точку пересечения двух прямых? В каких случаях решение этой задачи существует, а в каких отсутствует?
13. Как найти угол, под которым пересекаются две прямые?
14. Напишите уравнение окружности данного радиуса с центром в начале координат.
15. Напишите уравнение окружности данного радиуса с центром в произвольно заданной точке.
16. Какие кривые 2-го порядка вы знаете?
17. Может ли геометрическим образом уравнения 2-й степени относительно декартовых координат быть одна единственная точка?
18. Может ли уравнение 2-й степени относительно декартовых координат не иметь геометрического образа?
19. Ответьте на два последних вопроса применительно к уравнению 1-й степени.

Задания для аудиторной и домашней работы

1. Найти расстояние между точками.

1) $O(0, 0)$ и $M(-4, 3)$; 2) $M_1(0, 5)$ и $M_2(7, 0)$;
3) $M_1(-2, 3)$ и $M_2(1, 7)$.

2. Найти середину отрезка M_1M_2 , если

1) $M_1(0, 0)$ и $M_2(-4, 3)$; 2) $M_1(0, 5)$ и $M_2(7, 0)$;
3) $M_1(-2, 3)$ и $M_2(1, 7)$.

3. Построить треугольник с вершинами:

$M_1(-3, -2)$, $M_2(-5, 8)$, $M_3(4, -3)$

и определить длину медианы, проведенной из вершины M_3 .

4. Построить треугольник с вершинами:

$O(0, 0)$, $M_1(3, 3)$, $M_2(6, -6)$

и найти его периметр. Определить вид треугольника и написать уравнение биссектрисы для угла M_1OM_2 .

5. Найти угловой коэффициент каждой из прямых, заданных уравнениями:

$$1) \quad y = \frac{x}{2};$$

$$3) \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-7}{5};$$

$$2) \quad 2x - y - 1 = 0;$$

$$4) \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{7} = 1$$

и построить эти прямые.

6. Найти уравнение каждой из прямых, проходящих через точку $M_0(2; -3)$ и образующих с осью Ox следующие углы:

$$1) 45^\circ; \quad 2) \frac{\pi}{3}; \quad 3) \frac{2}{3}\pi; \quad 4) 135^\circ.$$

7. Найти уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 :

$$1) M_1(2, 3) \text{ и } M_2(-4, 5); \quad 2) M_1(-7, 8) \text{ и } M_2(10, 8).$$

8. Какой угол с осью Ox образует прямая, проходящая через точки $M_1(2, \sqrt{3})$ и $M_2(0, -\sqrt{3})$?

9. Найти уравнения сторон треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ и $B(2, 1)$.

10. Даны уравнения сторон треугольника: $5x - 3y - 15 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$, $3x + y + 5 = 0$. Построить треугольник и вычислить координаты его вершин.

11. Найти точку пересечения и угол между прямыми, заданными уравнениями: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \sqrt{3})$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - \sqrt{3})$.

12. Найти общие точки следующих прямых:

$$1) \quad \begin{cases} 8x - 3y - 1 = 0, \\ 4x + y - 13 = 0; \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} 5x - 2y + 13 = 0, \\ -10x + 4y - 26 = 0. \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} 3x + 7y - 15 = 0, \\ 9x + 21y + 3 = 0; \end{cases}$$

13. Найти расстояние от точки M_0 до прямой l :

$$1) M_0(2, 3) \text{ и } l: 3x + y - 7 = 0; \quad 2) M_0(2, 4) \text{ и } l: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

14. Найти площадь треугольника с вершинами $M_1(1, 1)$, $M_2(4, 2)$ и $M_3(3, 3)$.
15. Через точку $M_1(2, 1)$, провести прямую, которая
- 1) параллельна оси Ox ;
 - 2) параллельна оси Oy ;
 - 3) проходит через начало координат;
 - 4) образует угол 45° с осью Ox ;
 - 5) отсекает на оси Ox отрезок $a = 4$;
 - 6) проходит через центр окружности, задаваемой уравнением $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$;
 - 7) касается окружности $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$;
 - 8) перпендикулярна прямой, заданной уравнением $x + 4y = 0$.

16. Построить кривые, заданные уравнениями:

- | | |
|---|--|
| 1) $(x - 2)^2 + y^2 = 1$; | 7) $xy = -2$; |
| 2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; | 8) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 3$; |
| 3) $xy = 1$; | 9) $x^2 - y^2 = 1$; |
| 4) $x^2 = 4y$; | 10) $x^2 - y^2 = -1$; |
| 5) $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 4$; | 11) $x^2 - y^2 = 0$; |
| 6) $y^2 = 2x$; | 12) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 0$. |

Задания для индивидуальной домашней работы № 3

В каждом задании N — номер вашего варианта.

1. Найти расстояние между точками $A(N - 8, N - 10)$ и $B(N - 12, N - 7)$.
2. Найти координаты середины отрезка AB , если $A(0, N)$, $B(0, -3N)$.
3. Найти координаты середины отрезка AB , если $A(N, 4 - N)$, $B(-N, -N)$.

4. Построить прямые линии:

1) $x = \frac{N}{4}$; 2) $y = -\frac{N}{3}$; 3) $y = x + (N - 10)$; 4) $y = \frac{N}{4}x$.

5. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 и M_2 : $M_1(N - 8, N - 10)$ и $M_2(N - 12, N - 7)$ и построить эту прямую.

6. Начертить две прямые l_1 и l_2 :

$$l_1: x + y = 0 \text{ и } l_2: 2x - y + (N - 10) = 0$$

и найти координаты общей точки.

7. Имеется ли у прямых

$$l_1: x + y + 2N = 0 \text{ и } l_2: y = -x + \frac{N}{2}$$

точка пересечения? Построить эти прямые.

8. Найти площадь треугольника с вершинами $M_1(1, 1)$, $M_2(4, 2)$ и $M_3(7, N)$.

9. Написать уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом N . Проходит ли эта окружность через точку $M_1\left(\frac{N}{2}, \frac{N\sqrt{3}}{2}\right)$? Построить эту окружность и точку M_1 .

10. Написать уравнение окружности с центром в начале координат и проходящей через точку $M_1\left(\frac{N\sqrt{2}}{2}, \frac{N\sqrt{2}}{2}\right)$? Выяснить, лежат ли точки $M_2(3, 4)$ и $M_3(-16, 12)$ внутри или вне круга? Найти расстояние от каждой из этих точек до окружности.

11. Построить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq N^2, \\ x \leq N - \frac{1}{2}, \\ y \geq -N + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Глава 4

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

... И Шахразаду застигло утро и она прервала дозволенные речи. Когда же настала 150-я ночь, она сказала: «Дошло до меня, о счастливый царь, ...»

Тысяча и одна ночь

В окружающей нас действительности мы регулярно наблюдаем в определенной последовательности явления природы, общественные события, человеческие поступки. Это не только следующие одна за другой тысяча сказочных ночей Шахразады, но и бесконечная череда дней нашей реальной жизни. У Пастернака («Единственные дни»): «И целая их череда / построилась мало-помалу — тех дней единственных, когда / нам кажется, что время стало». А вот еще с детства всем знакомое: «И тридцать витязей прекрасных / чредой из вод выходят ясных...» или «И шел, колыхаясь, как в море челнок, / верблюд за верблюдом, вздымая песок...». *Караван* (верблюдов в пустыне или судов в океане), *цепь* (событий), *вереница* и *череда* — все это поэтические синонимы слова *последовательность*. А вот примеры прозаические, зато ближе затрагивающие каждого из нас. Последовательность учебных занятий отражена в расписании, во второй половине дня наступает черед личных дел. А кого из студентов и их родителей не заинтересует последовательность экзаменационных оценок в зачетной книжке, вплоть до отметки по государственному экзамену? Череда дней и ночей, сезонов и межсезоний влияет на биоритмы и потому ощущения этих последовательностей доступны не только людям, но всему живому. А первая из *математических* последовательностей, с которой каждый человек встречается в раннем детстве — это привычный всем нам арифметический счет: 1, 2, 3, ...

§ 1. Числовые последовательности: определения и примеры

Для точного выражения того общего, что присуще этим и другим многочисленным примерам, в которых события происходят одно за другим, следует прибегнуть к более обобщенному, формальному — математическому — языку, ибо именно числа — первооснова математики — дают возможность охарактеризовать различные по своей природе явления единообразным способом, выражающим их сущность.

А. Определение 1. *Конечное или бесконечное множество нумерованных чисел, расположенных в порядке возрастания их номеров, называется числовой последовательностью. Составляющие ее числа называются членами последовательности.*

Таким образом, это определение устанавливает связь между конкретным числом (членом последовательности) и его местом в последовательности.

Будем записывать бесконечную числовую последовательность следующим образом:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

Член последовательности, имеющий номер n , то есть u_n , называется *общим членом* последовательности.

Обычно предполагается, что если последовательность конечная, то u_n — это ее последний член; в случае бесконечной последовательности u_n — это произвольный член последовательности.

Примеры последовательностей

1. $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ — натуральный ряд чисел образует бесконечную последовательность. Здесь $u_n = n$: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, ...
2. $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$ — четные числа также образуют бесконечную последовательность, $u_n = 2n$: $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 6$, ...

В этих примерах последовательность задана и не составляет труда записать выражение общего члена. Чаще всего последовательность определяется заданием формулы ее общего члена, в котором индексу n надлежит придавать значения из натурального ряда чисел.

3. Общий член $u_n = 2n - 1$ определяет последовательность нечетных чисел: $1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$. Это можно было бы представить в виде таблицы:

Таблица 4.1

n	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	...
$u_n = 2n - 1$	$u_1 = 1$	$u_2 = 3$	$u_3 = 5$	...

4. Если $u_n = n^2$, то имеем: 1, 4, 9, ..., n^2 , ... Это последовательность квадратов натуральных чисел. Ее можно также представить в виде таблицы:

Таблица 4.2

n	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	...
$u_n = n^2$	$u_1 = 1$	$u_2 = 4$	$u_3 = 9$	...

Построим на плоскости последовательность точек M_n : M_1 , M_2 , M_3 , ..., отвечающую этой числовой последовательности (рис. 1).

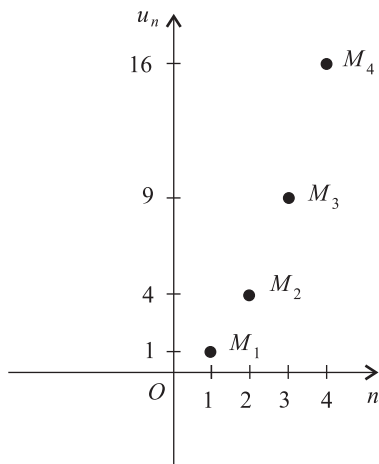


Рис. 1.

5. Если $u_n = \frac{1}{n}$, то получим: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n}$, ... Это последовательность чисел, обратных натуральным числам (рис. 2).
 6. Если $u_n = 2^{n-1}$, то имеем: 1, 2, 4, ..., 2^{n-1} , ...
 7. Если $u_n = (-1)^{n+1}$, то получаем: 1, -1, 1, -1, ..., $(-1)^{n+1}$, ... (рис. 3).

Можно придумать сколько угодно последовательностей; для этого нужно каждый раз задавать общий член некоторой формулой. Последовательности можно также получать, выполняя

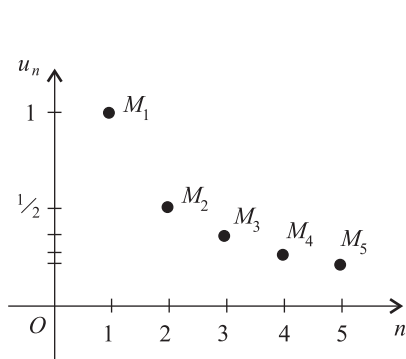


Рис. 2.

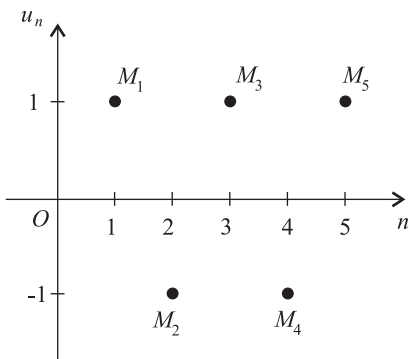


Рис. 3.

(почленно) различные арифметические действия над двумя заданными последовательностями.

Определим свойства, позволяющие классифицировать последовательности $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$

Определение 2. Последовательность называется *возрастающей* (убывающей), если каждый ее член, начиная со второго, больше (меньше) предыдущего.

В вышеприведенных примерах пять последовательностей возрастающие, одна — убывающая и одна не является ни убывающей, ни возрастающей.

Определение 3. Последовательность называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M , что $u_n < M$ при любом значении n и *ограниченной снизу*, если существует такое число m , что $u_n > m$ при любом значении n .

Читателю рекомендуется самостоятельно решить вопрос об ограниченности сверху или снизу приведенных выше последовательностей.

В. Среди числовых последовательностей выделяются *прогрессии* (progressus, лат. — означает движение вперед, от низшего к высшему).

а) Напомним, что *арифметическая прогрессия* — это такая числовая последовательность, общий член которой задается формулой:

$$a_n = a + (n - 1)d.$$

Число d называют *разностью* прогрессии; при $n = 1$ имеем $a_1 = a$. Согласно формуле общего члена арифметическая прогрессия имеет вид:

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d, \dots$$

Отметим, что при $d > 0$ арифметическая прогрессия — *возрастающая*, а при $d < 0$ — *убывающая* (при $d = 0$ имеем последовательность одинаковых чисел).

Замечаем, что в приведенных выше примерах три первые последовательности являются возрастающими арифметическими прогрессиями, а остальные последовательности арифметическими прогрессиями не являются.

Выведем формулу для вычисления суммы S_n первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

С этой целью сложим эту сумму почленно с суммой тех же чисел, но записанных в обратном порядке.

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1.$$

Получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Оказывается, что во всех скобках стоит одна и та же величина: $a_1 + a_n$.

Например,

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n.$$

Поскольку число таких слагаемых равно n , получаем:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n.$$

Это приводит к следующей формуле для суммы n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n.$$

Пример.

Найти сумму первых ста натуральных чисел.

Решение.

Натуральный ряд чисел образует арифметическую прогрессию, в которой $a = d = 1$. Поскольку в нашем примере $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$, $n = 100$, находим:

$$S_{100} = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 5050.$$

С этой задачей в раннем детстве легко справился великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс.

б) Напомним, что *геометрическая прогрессия* — это такая числовая последовательность, общий член которой задается формулой:

$$b_n = bq^{n-1}.$$

Число q называют *знаменателем* прогрессии; при $n = 1$ имеем $b_1 = b$.

В приведенных выше примерах шестая и седьмая последовательности являются геометрическими прогрессиями.

Укажем один из важных случаев: при $b > 0$, $0 < q < 1$ — убывающая геометрическая прогрессия.

Выведем формулу для вычисления суммы S_n первых n членов произвольной геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n.$$

Имеем

$$S_n = b + bq + \dots + bq^{n-2} + bq^{n-1}.$$

Умножая обе части этого равенства на q

$$S_n q = bq + bq^2 + \dots + bq^{n-1} + bq^n$$

и вычитая из второго равенства первое (при этом большинство членов взаимно уничтожаются), получаем следующее соотношение:

$$S_n q - S_n = bq^n - b = b(q^n - 1).$$

Отсюда один шаг до искомой формулы ¹⁾ суммы n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Для сравнения последовательностей, возрастающих по законам арифметической и геометрической прогрессий, обратимся к примерам.

Экономическая задача

По сообщению из Ульяновска (6.04.02, НТВ) в Медине (Италия) строится автозавод по производству «русских джипов» (УАЗ). Предполагается, что в первые несколько лет ежегодный рост производства и сбыта автомобилей на европейских рынках будет происходить в геометрической прогрессии: в 2002 году —

¹⁾ Эта формула содержится в 9-й книге «Начал» Евклида.

200 штук, в следующем году — 1200 штук и т.д. В то же время на одном из волжских автозаводов также наблюдается неуклонный ежегодный рост числа выпущенных автомобилей, но по закону арифметической прогрессии: в 2002 году — 10000 штук, в каждый следующий год — на 5000 штук больше, чем в предыдущем. Нарисуем таблицу, отражающую цифры, заложенные в производственные мощности каждого из предприятий.

	1 год	2 год	3 год	4 год	5 год
1 завод	200	1 200	7 200	43 200	259 200
2 завод	10 000	15 000	20 000	25 000	30 000

Из таблицы видно, что в долгосрочном плане совместное российско-итальянское производство (рост в геометрической прогрессии) существенно превосходит отечественное, которое также возрастает, но в арифметической прогрессии.

Шахматная история

Считается, что шахматы были придуманы в Индии. По преданию, когда изобретатель шахмат Сете познакомил с ними царя Шарама, верховному правителю игра настолько понравилась, что он решил наградить изобретателя и, расщедрившись, великодушно предложил ему самому выбрать себе вознаграждение. Хитроумный творец новой игры, очистив шахматную доску от фигур, положил на первую клетку одно пшеничное зернышко, на вторую — два, на третью — четыре и попросил магараджу приказать слугам выкладывать зерна на все последующие клетки шахматной доски, каждый раз удваивая число зерен:

1, 2, 4, 8, 16, ...

и так до последней — 64-й клетки, с тем, чтобы общее количество выложенного зерна и стало ему наградой. Монарху, не искушенному в коварных тайнствах геометрических прогрессий, такая просьба показалась чрезмерно скромной, но поскольку изобретатель настаивал, слуги принялись исполнять это задание.

Однако выполнить его до конца не удалось. Необходимого количества зерен, легко вычисляемого по формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{63} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1,$$

не нашлось бы не только во всех царских закромах, но его не удалось бы собрать даже в том случае, если бы весь земной шар засеяли пшеницей ¹⁾).

Вот какие конфузы иногда подкарауливают чересчур самоуверенных и не слишком математически образованных правителей!

«Реакционные» прогрессии Томаса Мальтуса

В наши дни, как только заходит речь о демографическом взрыве и истощении природных ресурсов, вспоминают того, кто предвидел это раньше других — английского экономиста Томаса Мальтуса (1766–1834) и его главный труд «Опыт о законе народонаселения». Получив образование в Кембридже (где, к слову сказать, у него открылись и незаурядные математические способности), Мальтус добился наибольших успехов как основоположник демографии. Более всего уважавший факты и опиравшийся, прежде всего, на «бесстрастную цифирь», Мальтус в своих теориях выступал с позиции социологии. Статистические выкладки по многим странам показывали, что население, если не мешать его свободному воспроизводству, удваивается каждые 25 лет — то есть растет в *геометрической прогрессии* со знаменателем $q = 2$ (как и число зернышек на шахматной доске!). Между тем, объем ресурсов, необходимых для поддержания жизни, растет лишь в *прогрессии арифметической*. Разумеется, два века назад трудно было вообразить все то позитивное, что изобретет человечество для снятия проблемы голода: инкубаторы, генные добавки, инсектициды, клонирование и многое другое. Также невозможно было представить себе и многочисленные негативные сюрпризы, поджидавшие людей на пути прогресса — такие, как загрязнение окружающей среды, изменение климата, мировые войны, катастрофы и глобальные экологические кризисы — оказавшие и продолжающие оказывать немалое сдерживающее влияние на рост народонаселения. Однако нельзя не согласиться с общим выводом ученого о перекосе в соотношении «население — средства существования», ибо результаты его научных изысканий базируются на незыблемом математическом фундаменте, а именно — на сравнении роста по законам геометрической и арифметической прогрессии (фигурально выражаясь, прогрессии он увидел, а вот «прогресс» проглядел!). К слову сказать, дети Томаса Мальтуса — дочь и два сына — не оставили потомства, поэтому пессимистичный создатель «реакционной»

¹⁾ Общее число зерен 18 446 744 073 709 551 615 подсчитал арабский математик аль-Бируни (973–1048).

теории народонаселения не внес собственной лепты в установленный им дисбаланс и, таким образом, насколько это было в его силах, не способствовал убийственному для человечества демографическому взрыву.

§ 2. Предел числовой последовательности

Слово *предел* в русском языке употребляется очень часто. Это синоним слов граница, рубеж. В обиходе частенько мы произносим слово «предел», когда хотим сказать о том, что стремимся к чему-то. Например, если говорить о разных студентах, которые изучают математику, то можно высказаться в таком духе, что предел желаний одних — получить зачет, между тем как не исключено, что предел желаний других — не только получить красный диплом, но и стать в дальнейшем, например, президентом... чего-нибудь! Нередко, когда нет возможности выдерживать происходящее, мы говорим, что наступает предел терпению. В последнее время получило хождение и зловещее слово *беспредел*. Придадим точный математический смысл понятию *предела* применительно к числовым последовательностям.

Основное определение

А. Начнем с *примера*.

Рассмотрим числовую последовательность, задаваемую общим членом $u_n = \frac{n+1}{n}$. Представим ее в форме таблицы:

n	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	...
$u_n = \frac{n+1}{n}$	$u_1 = \frac{2}{1}$	$u_2 = \frac{3}{2}$	$u_3 = \frac{4}{3}$	...

Далее, построим на плоскости последовательность точек M_n : $M_1, M_2, M_3, \dots$, соответствующую данной числовой последовательности (рис. 4):

Нетрудно видеть, что $u_n > 1$ при любом значении n , то есть последовательность ограничена снизу. Поскольку при этом каждый член последовательности, начиная со второго, меньше предыдущего (предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно!), то последовательность убывающая.

Итак, члены последовательности убывают, но превосходят единицу. Рассмотрим разность между членами последовательности.

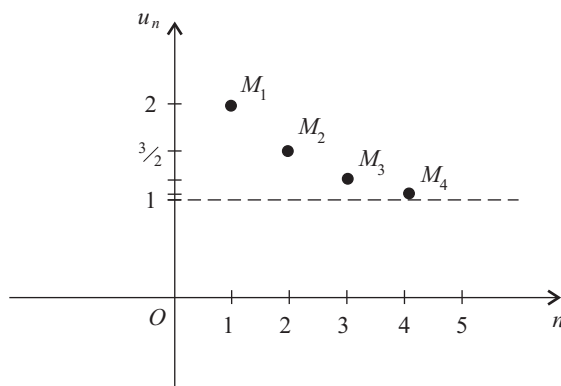


Рис. 4.

сти и единицей:

$$\begin{aligned}
 u_1 - 1 &= 1, \\
 u_2 - 1 &= \frac{1}{2}, \\
 u_3 - 1 &= \frac{1}{3}, \\
 &\dots \\
 u_n - 1 &= \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Эти разности становятся все меньше и меньше, и мы интуитивно ощущаем, что с ростом номера n они могут стать меньше любого сколь угодно малого числа. Например, меньше, чем $\frac{1}{10}$:

$u_n - 1 < \frac{1}{10}$ для всех членов последовательности, номер которых больше десяти: $n > 10$; аналогично $u_n - 1 < \frac{1}{100}$ при $n > 100$ и так далее. Для выражения малости разности $u_n - 1$ в общем виде обычно используют греческую букву ε (читается: *эпсилон*), полагая, что $\varepsilon > 0$ — это *сколь угодно малое* положительное число. В нашем примере позволительно сделать общий вывод: для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ разность $(u_n - 1)$ меньше, чем ε для всех членов последовательности, номера которых удовлетворяют требованию $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Таков точный смысл, который мы вкладываем в высказывание: «члены последовательности *неограниченно* приближаются к единице». На письме это выражается следующим образом: $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ (чита-

ется: $\frac{n+1}{n}$ стремится к единице при неограниченно возрастающем n , или при n стремящемся к бесконечности). Но наиболее распространенная форма записи следующая:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

В. Теперь мы подготовлены к тому, чтобы принять следующее общее определение предела числовой последовательности:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

Определение 4. Число a называется пределом числовой последовательности u_n , если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число N , зависящее от ε : $N(\varepsilon) > 0$, что для всех номеров n таких, что $n > N(\varepsilon)$, выполняется условие:

$$|u_n - a| < \varepsilon.$$

Этот факт выражают разными способами. Например, можно написать так: при $n \rightarrow \infty$ (при неограниченно возрастающем n) $u_n \rightarrow a$. Чаше, однако, применяется следующая запись:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a;$$

читается так: предел u_n при n , стремящемся к бесконечности, равен a (lim от латинского limes — предел).

Замечание 1. В рассмотренном выше примере $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$.

Замечание 2. Существование предела в нашем примере не случайно, оно обусловлено наличием у последовательности двух важных свойств: убывания ($u_n < u_{n-1}$) и ограниченности снизу ($u_n > 1$). Справедлив следующий достаточный признак существования предела: убывающая, ограниченная снизу последовательность имеет предел. (Строгое доказательство можно найти в более подробных руководствах по математическому анализу.)

Замечание 3. Знак модуля в неравенстве $|u_n - a| < \varepsilon$ позволяет распространять понятие предела на случай, когда члены последовательности меньше числа a .

Отметим, что далеко не каждая числовая последовательность имеет предел. Тот факт, что общий член последовательности

неограниченно возрастает, то есть предела не существует, выражают записью

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty.$$

Особый интерес представляют последовательности, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

В этом случае u_n называется *бесконечно малой величиной* или просто *бесконечно малой*.

Замечание 4. Во избежание недоразумений сразу оговоримся, что этот термин не выражает малости значений тех или иных конкретных членов последовательности; он лишь отражает характер переменной величины u_n , которая в процессе ее изменения с ростом номеров может быть сделана меньше любого наперед заданного числа ε . Будем обозначать бесконечно малую через α_n . Таким образом, должно выполняться требование: $|\alpha_n| < \varepsilon$ для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n > N(\varepsilon)$.

Прилагая к условию

$$|u_n - a| < \varepsilon$$

вновь введенное понятие, замечаем, что разность $(u_n - a)$ есть величина бесконечно малая, то есть $u_n - a = \alpha_n$ и, таким образом,

$$u_n = a + \alpha_n.$$

Мы пришли к важному принципиальному результату: переменная величина u_n , имеющая предел, равный a , является суммой постоянного числа a и некоторой бесконечно малой α_n . Верно и обратное утверждение.

Так, в рассмотренном выше примере

$$u_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

поэтому $a = 1$, $\alpha_n = \frac{1}{n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

Дальнейшие свойства бесконечно малых и правила вычисления пределов, основанные на этих свойствах, мы рассмотрим позднее, в шестой главе, применительно к более широкому классу переменных величин. Здесь упомянем лишь одно из этих свойств: произведение бесконечно малой величины на постоянное число есть величина бесконечно малая. Оно следует из того,

что требование $|C\alpha_n| < \varepsilon$ выполняется одновременно с условием $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{|C|}$.

Занимаясь последовательностями, обратимся к двум важным случаям — первый из них возвращает нас к геометрическим прогрессиям.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Рассмотренная выше геометрическая прогрессия с общим членом b_n

$$b_n = bq^{n-1}$$

называется *бесконечно убывающей*, если она бесконечная и ее знаменатель q удовлетворяет условию: $0 < |q| < 1$.

А. Покажем, что b_n есть величина бесконечно малая. Для этого убедимся в том, что для любого сколь угодно малого положительного числа ε все члены последовательности, начиная с некоторого, оказываются по модулю меньше, чем ε : $|u_n| < \varepsilon$. Нужное условие для номера n получается после рассмотрения следующих неравенств (для упрощения записей мы полагаем, что все члены последовательности положительны):

$$b_n < \varepsilon \Leftrightarrow bq^{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow q^{n-1} < \frac{\varepsilon}{b} \Leftrightarrow n-1 > \log_q \frac{\varepsilon}{b}$$

(при логарифмировании по основанию q предпоследнего неравенства знак неравенства изменился, поскольку $0 < q < 1$).

Обозначив $\log_q \frac{\varepsilon}{b} = N(\varepsilon) - 1$, сформулируем полученный результат: для любого, сколь угодно малого положительного числа ε существует такое значение $N(\varepsilon)$, что условие $|b_n| < \varepsilon$ выполняется для всех номеров n , для которых $n > N(\varepsilon)$. Поэтому b_n есть величина бесконечно малая.

Пример.

При $b = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ имеем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, которую представим в виде таблицы:

n	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	...
$u_n = \frac{1}{2^n}$	$u_1 = \frac{1}{2}$	$u_2 = \frac{1}{4}$	$u_3 = \frac{1}{8}$	...

Далее, построим на плоскости последовательность точек M_n , соответствующую данной прогрессии (рис. 5).

Проиллюстрируем на этом примере, как по конкретным значениям ε получить соответствующие неравенства для n .

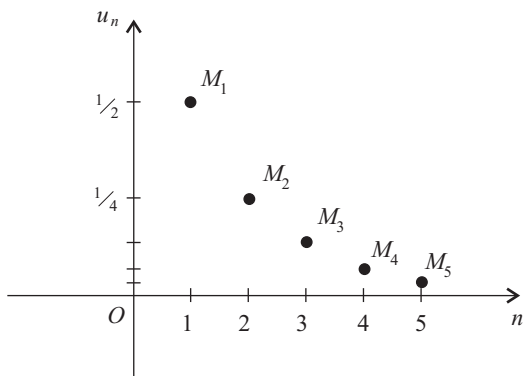


Рис. 5.

При $\varepsilon = \frac{1}{8}$ требование $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$ выполняется при условии $n > 3$.

Аналогично при $\varepsilon = \frac{1}{1024}$ требование $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1024} = \frac{1}{2^{10}}$ выполняется при условии $n > 10$.

В общем случае для произвольного $\varepsilon > 0$ требование $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ выполняется при $n > \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon$.

Из рис. 5 видно, что последовательность точек M_n неограниченно приближается к горизонтальной оси — такова графическая иллюстрация бесконечной малости величины $b_n = \frac{1}{2^n}$.

В. Рассмотрим последовательность *частичных сумм* S_n , порождаемую данной бесконечно убывающей геометрической прогрессией:

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

Здесь обозначено:

$$S_1 = b_1.$$

$$S_2 = b_1 + b_2 \text{ — сумма первых двух членов.}$$

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3 \text{ — сумма первых трех членов.}$$

...

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n \text{ — сумма первых } n \text{ членов.}$$

Значение $S_n = \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}$ общего члена этой последовательности, найденное ранее, можно представить в следующем виде:

$$S_n = \frac{b}{1 - q} - \frac{b}{1 - q} q^n.$$

Переходя к пределу и вспоминая свойство бесконечно малых, упомянутое на стр. 76, заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1-q}.$$

Этот предел принимают за сумму S всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии ¹⁾:

$$S = \frac{b}{1-q}.$$

Для иллюстрации вернемся к примеру, где $b_n = \frac{1}{2^n}$. В этом случае имеем следующую последовательность:

$$S_1 = \frac{1}{2}.$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

...

Этой числовой последовательности соответствует последовательность M_n точек на плоскости (рис. 6).

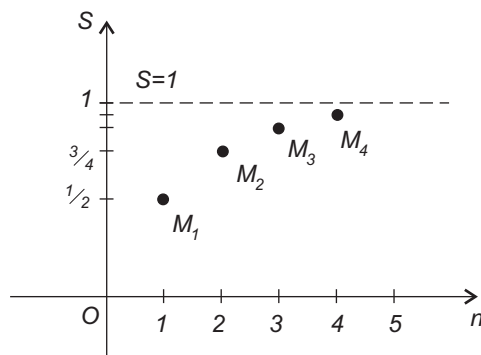


Рис. 6.

¹⁾ А вот как выводил эту формулу Архимед: $S = b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots = b + q(b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots) = b + qS$, откуда $S = \frac{b}{1-q}$.

Из рис. 6 видно, что последовательность точек M_n неограниченно приближается к горизонтальной прямой $S = 1$. Это соответствует результату, полученному по формуле

$$S = \frac{b}{1-q} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

В общем случае записывают

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = S;$$

в нашем примере

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1.$$

Еще один важный предел

Рассмотрим задачу о банковских операциях, которая приводит к пределу, играющему важную роль как непосредственно в математике, так и в ее приложениях.

Предположим, что S_0 — сумма первоначального вклада в банк. Какой она станет через год с учетом банковских начислений, зависит не только от того, какие годовые проценты выплачивает банк в качестве прибыли, но и от частоты начисления прибыли. Рассмотрим разные варианты. Простоты ради будем считать, что банк выплачивает прибыль из расчета 100 % годовых.

Если прибыль начисляется один раз в конце года, то через год первоначальный вклад удваивается:

$$S_1 = S_0 + S_0 = S_0(1 + 1).$$

Но прибыль может начисляться и дважды в год — первый раз по истечении 6 месяцев и второй раз в конце года. Тогда из расчета 100 % годовых через полгода будет прибавлена сумма, равная половине первоначальной суммы, то есть $\frac{S_0}{2}$; таким образом, через полгода на счету вкладчика будет сумма: $\tilde{S} = S_0 + \frac{S_0}{2} = S_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)$. Вторично прибыль начисляется в конце года по тому же принципу и тогда окончательная сумма S_2 определится по формуле

$$S_2 = \tilde{S} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = S_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Аналогично могут быть подсчитаны итоговые суммы, которые выплачиваются банком в случае начисления прибыли (из расчета

тех же 100 % годовых) трижды, четырежды и вообще n раз в течение года через равные промежутки времени. Опуская подробности, приведем окончательный вид соответствующих сумм (индекс показывает, сколько раз в течение года производятся начисления):

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0(1 + 1), \\ S_2 &= S_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \\ S_3 &= S_0 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \\ S_4 &= S_0 \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4, \\ &\dots \\ S_n &= S_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Например, при начислении процентов ежедневно в високосный год будет

$$S_{366} = S_0 \left(1 + \frac{1}{366}\right)^{366}.$$

Разумеется, итоговая сумма всякий раз пропорциональна первоначальной сумме S_0 . Различие между разными случаями выражается в коэффициентах. Записав их один за другим, получим числовую последовательность. Отвлекаясь от банковского содержания задачи, рассмотрим бесконечную последовательность:

$$u_1 = 2, \quad u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \quad u_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \quad \dots, \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \dots$$

Для небольших значений n нетрудно проверить, что эта последовательность *возрастающая*:

$$u_n > u_{n-1}$$

и *ограниченная сверху*:

$$u_n < 3.$$

Эти свойства могут быть строго обоснованы и для произвольного n .

Имеет место следующий *достаточный признак существования предела: возрастающая, ограниченная сверху последовательность имеет предел* (строгое доказательство можно найти в книгах по математическому анализу).

Согласно этому признаку данная последовательность имеет предел. Следуя Леонарду Эйлеру, этот предел обозначают латин-

ской буквой e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

где e — иррациональное число, которое (как и любое другое иррациональное число) нельзя выразить конечной десятичной дробью. Его приближенное значение: $e \approx 2,7$ (или с большей точностью: $e \approx 2,71828$).

Число e появляется в разнообразных задачах научного и прикладного характера. Не говоря уже об исследованиях банковских операций, с числом e встречаются биологи, занимающиеся процессами органического роста и воспроизводства популяций живых клеток, а также социологи, изучающие эффективность рекламы, и политологи, исследующие распространение слухов и информации. Что касается математики, то в ней роль числа e (как и числа π) трудно преувеличить, и в дальнейшем курсе мы будем неоднократно встречаться с выражениями, содержащими это число.

Бином Ньютона

Общий член рассмотренной последовательности

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

является частным случаем *бинома* (т. е. двучлена) *Ньютона*

$$(a + b)^n.$$

При небольших значениях n выражения такого вида часто встречаются в школьном курсе математики. Хорошо известны формулы:

$$\text{при } n = 2: (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\text{при } n = 3: (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

правые части которых представляют собой разложения бинома Ньютона в многочлены второй и третьей степени. Эта закономерность сохраняется при произвольном n . Коэффициенты в разложении бинома Ньютона могут быть определены с помощью так называемого *треугольника Паскаля*:

Например, при $n = 5$ 6-я строка в треугольнике Паскаля дает возможность сразу написать следующее разложение:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

$n = 0$	1						
$n = 1$	1		1				
$n = 2$	1		2	1			
$n = 3$	1		3	3	1		
$n = 4$	1		4	6	4	1	
$n = 5$	1		5	10	10	5	1
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1
$\dots$	$\dots$						

Понятие о числовых рядах

В математике и ее приложениях часто встречаются символические бесконечные суммы следующего вида:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

Такие выражения называются *числовыми рядами*, а числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ называются членами ряда. С числовым рядом мы фактически уже встречались, когда рассматривали сумму всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Обычно наряду с числовым рядом рассматривают последовательность его *частичных* (то есть *конечных*) сумм (в случае бесконечно убывающей геометрической прогрессии мы так и поступали):

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

...

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n,$$

...

Если эта последовательность имеет (конечный) предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

то его называют суммой ряда, в этом случае записывают:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = S$$

и говорят, что данный ряд *сходится*. В противном случае говорят, что ряд *расходится*. Та же терминология применяется и к соответствующим последовательностям частичных сумм.

Например, ряд

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + \dots$$

расходится. Читателю рекомендуется убедиться в этом самостоятельно, предварительно составив последовательность соответствующих частичных сумм S_n .

Зная последовательность частичных сумм ряда, легко восстановить и сам ряд

$$S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \dots + (S_n - S_{n-1}) + \dots$$

Таким образом, между числовыми рядами и числовыми последовательностями имеется тесная связь.

По отношению к каждому числовому ряду возникают два вопроса: сходится он или расходится, и, далее, если сходится, то какова его сумма. Приведем (без доказательства) один из признаков сходимости или расходимости числовых рядов.

Пусть все члены ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

положительные числа. Обозначив отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n} = v_n$, предположим, что последовательность v_n имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v.$$

Тогда имеет место следующий *признак Даламбера*: если $v < 1$, то ряд сходится, а если $v > 1$, то ряд расходится.

Применим этот признак к следующему ряду:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots,$$

где $n!$ — читается: *эн-факториал* — равно произведению n первых натуральных чисел: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. В нашем случае имеем

$$u_n = \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)},$$

а

$$u_{n+1} = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n},$$

поэтому $v_n = \frac{1}{n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Следовательно, данный ряд сходится.

Что касается суммы этого сходящегося ряда, то доказано, что она равна числу e :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e.$$

Сохранив в левой части *конечное* число слагаемых, можно получить значение числа e с любой точностью. Например,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24} \approx 2,709.$$

В математике рассматриваются не только числовые, но и *функциональные ряды*. Для их изучения необходимо, прежде всего, разобраться детально с понятием *функции* — этому и будут посвящены следующие главы книги.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется числовой последовательностью?
2. Что называется общим членом числовой последовательности?
3. Какая числовая последовательность называется возрастающей? Убывающей?
4. Приведите пример возрастающей (убывающей) последовательности.
5. Приведите пример последовательности, которая не является ни возрастающей, ни убывающей.
6. Какая числовая последовательность называется ограниченной сверху? Снизу?
7. Приведите пример последовательности, которая ограничена сверху (снизу).
8. Приведите пример неограниченной последовательности.
9. Напишите выражение общего члена арифметической прогрессии.
10. Напишите формулу суммы конечного числа первых членов арифметической прогрессии.
11. Может ли (бесконечная) арифметическая прогрессия быть возрастающей? Убывающей? Не возрастающей и не убывающей? Ограниченной? Приведите примеры.
12. Чему равна сумма бесконечного числа членов арифметической прогрессии?
13. Напишите выражение общего члена геометрической прогрессии.
14. Напишите формулу суммы конечного числа членов геометрической прогрессии.

15. Может ли (бесконечная) геометрическая прогрессия быть возрастающей? Убывающей? Не возрастающей и не убывающей? Ограниченной? Приведите примеры.
16. Напишите формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
17. Что называется пределом числовой последовательности?
18. Дайте геометрическую интерпретацию понятия предела числовой последовательности.
19. Приведите примеры числовых последовательностей, имеющих и не имеющих предел.
20. Какие достаточные признаки существования предела числовой последовательности вам известны?
21. Как определяется число ϵ и каково его приближенное значение?
22. Какое выражение называется биномом Ньютона? Напишите разложение бинома Ньютона в многочлен при $n = 3$ и при $n = 4$.
23. Напишите разложение бинома Ньютона при $n = 5$ и $n = 6$.
24. Что называется числовым рядом?
25. Что называется частичной суммой числового ряда?
26. Что называется суммой числового ряда?
27. Какой числовой ряд называется сходящимся? Расходящимся?
28. В чем заключается признак сходимости и расходимости числовых рядов, называемый признаком Даламбера?
29. Представьте число e в виде суммы числового ряда.

Задания для аудиторной и домашней работы

1. Написать первые пять членов последовательности $u_n = \frac{2n-1}{n}$. Представить эту последовательность в виде таблицы и построить на плоскости соответствующую последовательность точек. Выяснить, является ли данная последовательность убывающей или возрастающей, ограничена ли она сверху или снизу? Прodelать ту же работу для последовательности $u_n = \frac{n}{2n-1}$.
2. Для каждой из данных последовательностей по первым четырем членам найти общий член u_n .
1) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots$; 2) $2, 6, 14, 30, \dots$

3. Проверить, что каждая из нижеследующих последовательностей являются арифметической прогрессией. Найти сумму первых десяти членов.

1) 4, 8, 12, 16, ...; 2) -5, -9, -13, -17, ...

4. Показать, что если $u_n = \frac{3}{2}n - 2$, то последовательность — арифметическая прогрессия. Найти a и d .

5. Сумма n членов последовательности

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

задается одной из формул:

1) $S_n = n^2 + n$; 2) $S_n = n^2 - n$; 3) $S_n = 3n^2 - 2n$.

Показать, что в каждом случае последовательность u_n — арифметическая прогрессия и найти a , d и общий член.

6. В терминах предыдущей задачи выяснить, является ли последовательность u_n арифметической прогрессией, если $S_n = An^2 + Bn + C$, где $A, B, C \in \mathbf{R}$ (в частности, рассмотреть пример: $S_n = n^2 + 2n + 2$).

7. Проверить, что каждая из следующих последовательностей является геометрической прогрессией. Найти сумму первых пяти членов.

1) $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \dots$; 2) -1, 5, -25, 125, ...

8. Найти сумму следующих бесконечно убывающих геометрических прогрессий:

1) $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \dots$; 2) $-2 + \frac{2}{5} - \frac{2}{25} + \dots$

9. Сумма n членов последовательности

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

задается формулой:

1) $S_n = 3^n + 1$, 2) $S_n = 4^n - 2$, 3) $S_n = 2^n - 10$.

Показать, что данные последовательности, начиная со второго члена, являются геометрическими прогрессиями.

10. Вычислить пределы следующих последовательностей u_n :

- | | |
|---|--|
| 1) $u_n = \frac{2n+1}{n}$; | 11) $u_n = 2^{\frac{n^2+1}{2n^2+1}}$; |
| 2) $u_n = \frac{2n+1}{\frac{n+1}{n^2+1}}$; | 12) $u_n = \log_2 \frac{8n}{n+1}$; |
| 3) $u_n = \frac{2n^2+1}{\frac{n^2+1}{n^2+1}}$; | 13) $u_n = \log_2 \frac{n^3+1}{n^3+2}$; |
| 4) $u_n = \frac{2n^2+3n-1}{4n^2-n+1}$; | 14) $u_n = \sin \frac{\pi n+1}{2n}$; |
| 5) $u_n = \frac{n+1}{\frac{3n^2+1}{3n^2-12n+8}}$; | 15) $u_n = \cos \frac{\pi n+2}{n+4}$; |
| 6) $u_n = \frac{3n^2-12n+8}{n+4}$; | 16) $u_n = \operatorname{tg} \frac{3\pi n+2}{12n-1}$; |
| 7) $u_n = \frac{n+1}{\sqrt{\frac{n^2+1}{2n^2+1}}}$; | 17) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$; |
| 8) $u_n = \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$; | 18) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$; |
| 9) $u_n = \frac{2n^2+1}{n+1} - \frac{4n^2+n-1}{2n+3}$; | 19) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$; |
| 10) $u_n = 2^{\frac{3n^2+1}{n^2-2}}$; | 20) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$. |

11. Проверить по треугольнику Паскаля справедливость следующих свойств.

1) Сумма биномиальных коэффициентов в разложении $(a+b)^n$ равна 2^n .

2) Сумма биномиальных коэффициентов нечетных членов в разложении $(a+b)^n$ равна сумме биномиальных коэффициентов четных членов.

12. Доказать эти свойства в общем случае.

13. Подсчитать приближенное значение числа e по формуле

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5$$

и сравнить с приближенным значением, приведенным на стр. 84. Сделать вывод о сравнительной *скорости сходимости* последовательности $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и ряда:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

14. Воспользовавшись признаком Даламбера, решить вопрос о сходимости или расходимости следующих рядов:

1) $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \dots$; 2) $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots$;

3) $\frac{5}{4} + \frac{25}{16} + \frac{125}{64} + \dots$

Для сходящихся рядов найти их суммы.

15. Найти сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots$

Можно ли решить вопрос о сходимости или расходимости этого ряда по признаку Даламбера?

Задания для индивидуальной домашней работы № 4

В каждом задании N — номер вашего варианта.

1. Написать первые пять членов последовательности $u_n = \frac{Nn-1}{n+1}$. Представить эту последовательность в виде таблицы и построить на плоскости соответствующую последовательность точек. Выяснить, является ли данная последовательность убывающей или возрастающей, ограничена ли она сверху или снизу? Прodelать ту же работу для последовательности $u_n = \frac{n+1}{Nn-1}$.
2. Показать, что если $u_n = Nn + n - 2$, то последовательность — арифметическая прогрессия. Найти a и d .
3. Найти сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{N}{2} + \frac{N}{6} + \frac{N}{18} + \dots$$

4. Вычислить пределы:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Nn + 1}{Nn^2 + 5};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Nn^2}{\sqrt{n^4 + n^2}};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Nn + 1}{\frac{n + 2}{Nn + 1}};$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{n^2 - 1}{n^2 + N}};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Nn + 1}{N^2n + 5};$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{27n - N}{3n + N};$$

Приложение

1. Возвращаясь к задаче, решенной пятилетним Гауссом, покажем, как образованные люди в древней Греции решали ее *геометрически*. Построим прямоугольник размерами 100 на 101 (рис. 7).

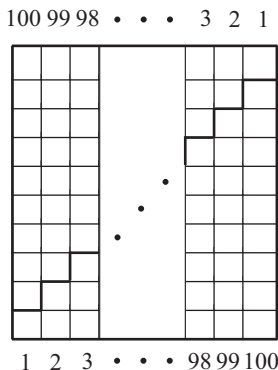


Рис. 7.

Площадь этого прямоугольника, равная произведению двух его измерений, может быть также получена сложением площадей составляющих его нижних и верхних «столбиков», что приводит к удвоенной сумме первых ста натуральных чисел: $2(1+2+3+\dots+100)$. В итоге получаем результат, указанный на стр. 69.

2. Разбивая квадрат со стороной n на единичные квадраты, самостоятельно получите *геометрически* формулу для суммы первых n нечетных чисел:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

и докажите ее методом математической индукции.

Глава 5

ФУНКЦИИ: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ, ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ. ОБЗОР ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция, правильно понятая, есть существование, мыслимое как деятельность.

И.В. Гете

На протяжении всей жизни человек не перестает иметь дело с многочисленными изменениями, происходящими в окружающем нас мире. Это имманентное свойство мироздания, человеческих сообществ и отдельно взятой личности было подмечено людьми еще в глубокой древности. В человеческом сознании оно отразилось многообразно — от глубоких и загадочных мыслей философского толка до высказываний игривого характера. Как заметил древнегреческий философ Гераклит: «*Panta rhei...*» — «Все течет, все изменяется», а его простодушных и более легкомысленных соплеменников сильнее всего поражало то, как «*varium et mutabile semper femina*», т. е. как «переменчива женщина и всегда другая». С течением времени изменяются возраст человека, его рост и вес; «соцветие» его близких и знакомых; сумма денег, которую он зарабатывает и тратит — примеры можно приводить до бесконечности. Величины, претерпевающие изменения и снабженные числовыми значениями, в математике называют *переменными*. Среди переменных величин можно выделить такие, которые *зависят* от других переменных величин, являющихся *независимыми*. Длина пробега автомобиля зависит от количества залитого в бак бензина; количество продукции, произведенной в данной отрасли хозяйства, зависит от размера инвестиций в эту отрасль. Отражая действительность во всех ее материальных проявлениях, математика не осталась в стороне от проблем такого рода. Их выражением является математическое понятие *функции* (от латинского *functio* — исполнение, действие) — важнейшее не только в математике, но и в ее многочисленных приложениях. В расхожем употреблении это слово обыч-

но характеризует круг обязанностей человека (В функции старосты группы входит аккуратное ведение журнала), какого-либо органа — общественного (Функции оргкомитета определяются регламентом конференции) или анатомического (Основной функцией головного мозга является высшая нервная деятельность) и т. п. В примерах такого рода под словом «функция» мы обычно подразумеваем определенный объем дел, тот или иной перечень возложенных на кого-либо обязанностей сообразно принятым правилам.

Первое знакомство с математическими функциями происходит в школьном курсе алгебры; их дальнейшее, более углубленное изучение, к которому мы приступаем, предполагает твердое знание заложенных ранее основ. Поэтому, прежде чем двигаться дальше, необходимо освежить в памяти и привести в порядок относящиеся к функциям основные определения и понятия, в большинстве своем известные из курса элементарной математики.

§ 1. Первоначальные сведения о функциях

Определение функции

Прикладные науки изучают *конкретные* величины, в математике предметом изучения являются *числовые* переменные или постоянные величины. Будем рассматривать две переменные величины x и y , принимающие значения на числовых множествах X и Y соответственно. Примем следующее

Определение 1. *Переменная величина y называется функцией от переменной величины x , если по некоторому правилу каждому значению $x \in X$ поставлено в соответствие определенное значение $y \in Y$; независимая переменная x обычно называется аргументом, а область X ее изменения называется областью определения функции.*

Обратим внимание на два аспекта в этом определении. Во-первых, в нем требуется существование некоторой области определения X независимой переменной x и некоторого правила (закона) соответствия между x и y . И, во-вторых, отметим абстрактный, отвлеченный характер этих требований: ни область определения, ни закон соответствия не названы конкретно (не говоря уже о том, что никакого конкретного физического или какого-либо иного смысла ни аргументу, ни функции не приписывается). Благодаря такой общности, характерной для математики, появляется возможность прилагать аб-

страктно получаемые математические результаты к разнообразным задачам из самых разных областей человеческой деятельности.

Тот факт, что y есть функция от x , чаще всего выражают символической записью

$$y = f(x),$$

которая читается: «игрек равно эф от икс»; для обозначения переменных и закона соответствия могут использоваться и другие латинские или греческие буквы. Обычно в качестве $f(x)$ выступает некоторое аналитическое выражение, содержащее x . В этом случае говорят, что функция определяется формулой, например, $y = 3x + 2$, $y = \sin x$ и т. п.

График функции

Пусть на плоскости задана система декартовых прямоугольных координат xOy . В основе геометрической интерпретации функций лежит следующее

Определение 2. *Графиком функции называется геометрическое место точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют условию: $y = f(x)$.*

Рассмотрим пару координат x и y , которые находятся в функциональном соответствии. Тогда геометрическим образом этой пары на плоскости будет некоторая точка M с абсциссой x и ординатой y : $M(x; y)$. Если переменная x изменяется в пределах области определения, то эта точка описывает некоторую кривую — конечную или бесконечную — которая и является графиком функции, ее *геометрическим образом* (рис. 1).

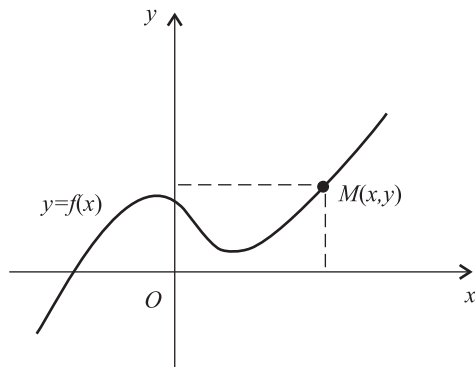


Рис. 1.

Имея перед глазами наглядный график функции, нетрудно представить себе многие ее свойства, что и делает график незаменимым средством исследования функции. Поэтому построение графика является важнейшей (обычно завершающей) частью исследования функции. Для получения графика требуется знать несколько его точек, координаты которых записывают последовательно в виде таблицы.

M	M_1	M_2	M_3	$\dots$	M_n
x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$y_3 = f(x_3)$	$\dots$	$y_n = f(x_n)$

Однако мало толку от случайно выбранных точек. Аппарат математического анализа призван помочь обнаружить самые существенные, наиболее *характерные* точки графика, отражающие геометрически важнейшие свойства функции.

Схема исследования основных свойств функции $y = f(x)$

Свойства функции обычно устанавливают в следующем порядке, одновременно отражая их на графике.

1) *Область определения X*

Исходя из вида конкретной функции, на оси абсцисс указывается множество допустимых значений x .

2) *Точка пересечения графика функции с осью ординат*

Если значение $x = 0$ принадлежит области определения, следует определить $f(x)$, т. е. значение, принимаемое функцией $f(x)$ при $x = 0$ (так определяется ордината точки пересечения графика с осью Oy).

3) *Нули функции*

Так называются значения x , при которых $f(x) = 0$ (этим уравнением определяются абсциссы точек пересечения графика с осью Ox).

4) *Области положительности и отрицательности функции*

Эти числовые множества определяются, соответственно, неравенствами: $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ (таким образом, на оси Ox область определения X разбивается на интервалы знакопостоянства функции). Каждому интервалу положительности функции отвечают точки графика *над* осью Ox , а каждому интервалу отрицательности — *под* осью Ox .

5) *Точки экстремума функции (точки максимума и минимума)*

Говорят, что функция имеет *максимум* при $x = x_0$, если значение $f(x_0)$ превосходит ее значения для всех x , взятых из некоторого интервала, содержащего x_0 , то есть $f(x_0) > f(x)$; аналогично неравенством $f(x_0) < f(x)$ определяется *минимум* функции в точке x_0 . Точки максимума и минимума (точки *экстремума*) отмечаются на оси Ox и на графике.

6) *Интервалы монотонности функции (интервалы возрастания и убывания функции)*

Функция называется *возрастающей* на интервале, если большим значениям аргумента соответствуют большие значения функции, то есть $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$; она называется *убывающей* на интервале, если большим значениям аргумента соответствуют меньшие значения функции, то есть $f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

При построении графика следует разбить область определения на интервалы возрастания и убывания — *интервалы монотонности* функции. Обычно эти интервалы ограничены точками минимума и максимума; причем на интервале возрастания кривая, являющаяся графиком функции, направлена от точки минимума слева снизу направо вверх к точке максимума, а на интервале убывания наоборот — от точки максимума слева сверху направо вниз к точке минимума.

7) *Асимптоты графика функции*

Асимптотой называется прямая, к которой стремится переменная точка $M(x; y)$ графика функции при неограниченном возрастании x или y (по модулю).

Если при стремлении аргумента x к граничным точкам области определения значение функции по модулю неограниченно возрастает, то в граничной точке график имеет *вертикальную* асимптоту.

Если область определения X допускает неограниченное возрастание аргумента x по модулю, то необходимо выяснить, как ведет себя при этом функция, и построить *горизонтальные* или *наклонные* асимптоты графика, если таковые имеются.

8) *Область значений функции*

Полученные к этому моменту результаты обычно позволяют ответить на вопрос о том, каково *множество* Y значений, которые принимает функция, и указать на оси Oy соответствующие интервалы.

Замечание. Исследование, проводимое лишь средствами элементарной алгебры, как правило, не дает возможности решить все поставленные выше вопросы. Этой цели служат средства математического анализа.

В дополнение к сказанному, следует выяснить, не принадлежит ли данная функция к одному из следующих специальных видов.

а) Напомним, что функция называется *четной*, если она определена на симметричном относительно начала координат множестве, для всех точек которого выполняется условие: $f(-x) = f(x)$, и называется *нечетной* при условии: $f(-x) = -f(x)$. В первом случае график симметричен относительно оси Oy , а во втором — симметричен относительно начала координат.

б) Далее, функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если ее область определения не ограничена и существует такое число a , что для всех x , принадлежащих области определения, выполняется условие:

$$f(x + a) = f(x).$$

Наименьшее из положительных чисел a , обладающее этим свойством, называется *периодом* функции. График такой функции строится на интервале длины a , а затем продолжается периодически на всю числовую ось.

§ 2. Основные элементарные функции

Перечислим *основные элементарные функции*, которые станут главным предметом нашего дальнейшего рассмотрения, — они появляются при решении самых разнообразных задач и чаще других используются как в самой математике, так и в ее многочисленных приложениях.

Линейная функция $y = ax + b$,

где a, b — заданные действительные числа.

Графиком линейной функции является некоторая *прямая*. Верно и обратное утверждение: всякая не вертикальная прямая является графиком некоторой линейной функции.

Пример.

Построить график функции $y = \frac{1}{3}x - 2$.

Чтобы провести прямую на плоскости xOy , достаточно построить две ее точки.

При $x = 0$ имеем: $y = -2$; полагая $x = 6$, находим $y = 0$. Через две точки $M_1(0; -2)$ и $M_2(6; 0)$ проводим прямую l , которая является графиком данной линейной функции (рис. 2).

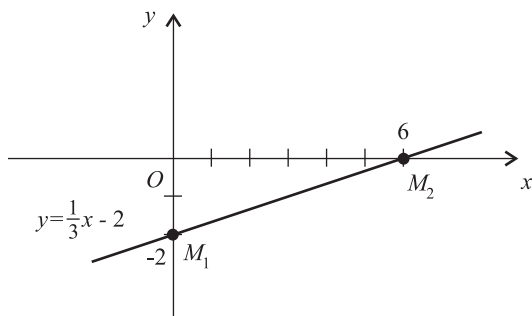


Рис. 2.

Рекомендуем читателю, используя график, самостоятельно перечислить свойства функции $y = \frac{1}{3}x - 2$ по вышеприведенной схеме.

Квадратичная функция (квадратный трехчлен)

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — заданные действительные числа.

Графиком квадратичной функции является *парабола*, ось симметрии которой параллельна оси Oy . Высшая (или низшая) точка параболы (расположенная на оси симметрии) называется ее *вершиной*.

Пример.

Построить график функции $y = x^2 - 6x + 8$.

Ордината точки M_1 пересечения параболы с осью Oy найдется, если в уравнении функции положить $x = 0$, при этом значение квадратичной функции равно свободному члену; в данном примере $y = 8$.

Далее найдем точку M_2 параболы, симметричную точке $M_1(0; 8)$. Так как ордината y этой точки также равна 8, то для нахождения ее абсциссы имеем уравнение: $x^2 - 6x + 8 = 8$. Одно решение этого уравнения: $x_1 = 0$ нам уже известно, поэтому абсцисса искомой точки равна второму решению: $x_2 = 6$.

Ось симметрии проходит посередине между точками $M_1(0; 8)$ и $M_2(6; 8)$, ее уравнение: $x = 3$. Поскольку вершина параболы лежит на оси симметрии, то ее абсцисса равна 3. Подставляя $x = 3$ в уравнение функции, находим $y = -1$.

Зная вершину $M_3(3; -1)$ (нижнюю точку параболы) и две ранее найденные симметричные точки M_1 и M_2 , нетрудно принципиально изобразить искомую параболу.

Однако для большей точности чертежа имеет смысл найти еще несколько точек, принадлежащих параболе, и, прежде всего, точки пересечения с осью Ox . Так как ординаты этих точек равны нулю, то их абсциссы находятся из уравнения: $x^2 - 6x + 8 = 0$, корни которого равны: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. В итоге получаем точки $M_4(2; 0)$ и $M_5(4; 0)$. Полученные результаты сведем в таблицу:

M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
x	0	6	3	2	4
y	8	8	-1	0	0

Найденные пять точек позволяют с приемлемой для нас точностью, используя лекало, построить искомую параболу (рис. 3).

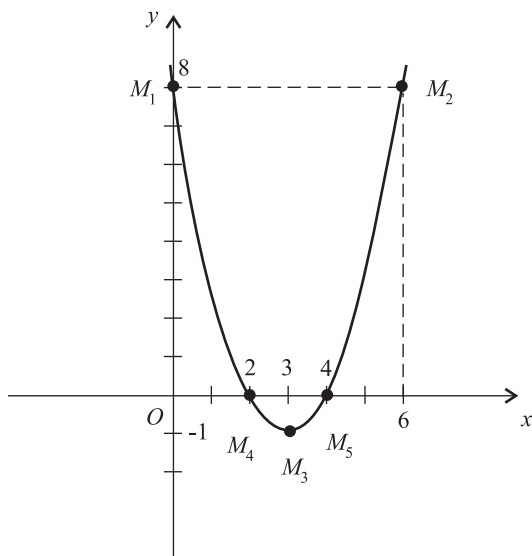


Рис. 3.

Перечислим свойства функции $y = x^2 - 6x + 8$.

- 1) Область определения X : $(-\infty; +\infty)$.
- 2) Точка пересечения графика с осью Oy : $M_1(0; 8)$.
- 3) Нули функции: $x = 2$, $x = 4$.

4) Два интервала положительности функции: $(-\infty; 2)$ и $(4; +\infty)$ и один интервал отрицательности функции: $(2; 4)$.

5) Минимум функции $y_{\min} = -1$ достигается при $x = 3$; максимумов нет.

6) Интервал убывания функции: $(-\infty; 3)$; интервал возрастания: $(3; +\infty)$.

7) Как при неограниченно убывающем аргументе ($x \rightarrow -\infty$), так и при неограниченно возрастающем аргументе ($x \rightarrow +\infty$), функция неограниченно возрастает: $y \rightarrow +\infty$.

8) Область значений функции Y : $(-1; +\infty)$.

9) Четности, нечетности, периодичности нет. Асимптот тоже нет.

Далее, опуская детали, продолжим рассмотрение элементарных функций. В каждом случае читателю предлагается провести самостоятельное исследование свойств функции, обосновывающее приводимый график.

Степенная функция $y = x^n$.

При $n = 1$ и при $n = 2$ функция, соответственно, принимает вид $y = x$ и $y = x^2$; в первом случае графиком является прямая, а во втором — парабола (рис. 4). На этом же рисунке изобразим графики степенных функций для $n = 3$ (*кубическая парабола*), $n = 4$ (*парабола четвертой степени*) и $n = \frac{1}{2}$ — в последнем случае функцию чаще записывают в виде: $y = \sqrt{x}$.

Замечание. Сделаем важное отступление. Обратим внимание на последнюю из приведенных функций: $y = \sqrt{x}$. Это соотношение равносильно тому, что $x = y^2$ ($y \geq 0$). Но если в этом уравнении поменять ролями аргумент и функцию, т. е. поменять местами x и y , то мы приходим к квадратичной функции: $y = x^2$. Таким образом, в паре функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ одна получается из другой, если аргумент и функцию поменять местами. По определению, такие функции называются *взаимно обратными*.

Если график данной функции проходит через какую-либо точку $(x_1; y_1)$, то очевидно, что точка с координатами $(y_1; x_1)$ принадлежит графику обратной функции. Эти точки расположены симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, поэтому и весь график обратной функции симметричен графику данной функции относительно биссектрисы этих углов. Именно так взаимно расположены в первом квадранте две параболы, являющиеся графиками функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ (часть второй из этих парабол, расположенная

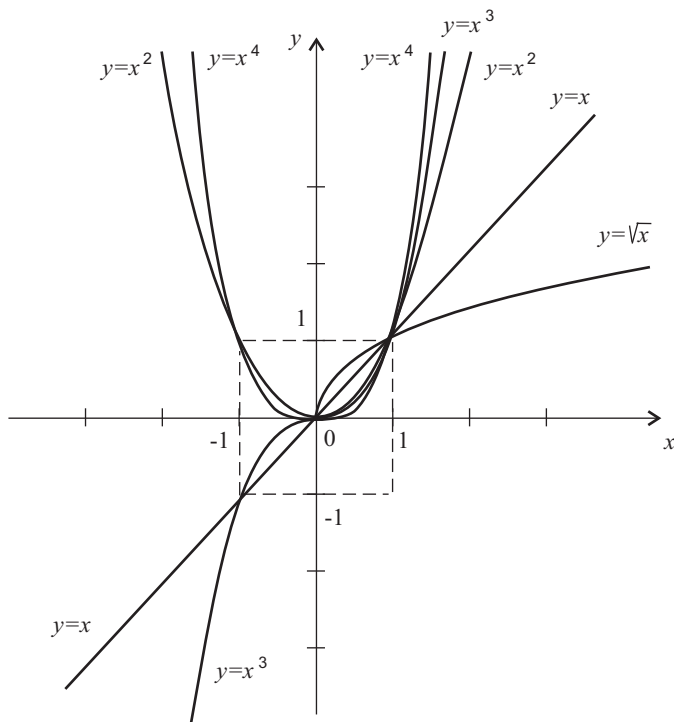


Рис. 4.

под осью Ox , — в четвертом квадранте — исключена, так как арифметический корень $y = \sqrt{x}$ не принимает отрицательных значений).

Описанный здесь принцип симметричного расположения графиков сохраняется для любых взаимно обратных функций.

$$\text{Дробно-линейная функция } y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Здесь коэффициенты при x и свободные члены в числителе и знаменателе — заданные действительные числа. Графиком дробно-линейной функции в общем случае является *гипербола*.

Наиболее простая дробно-линейная функция $y = \frac{1}{x}$ выражает *обратно пропорциональную зависимость*; представляющая ее гипербола хорошо известна из курса средней школы (рис. 5).

Пример.

Построить график дробно-линейной функции: $y = \frac{2x + 4}{x - 3}$.

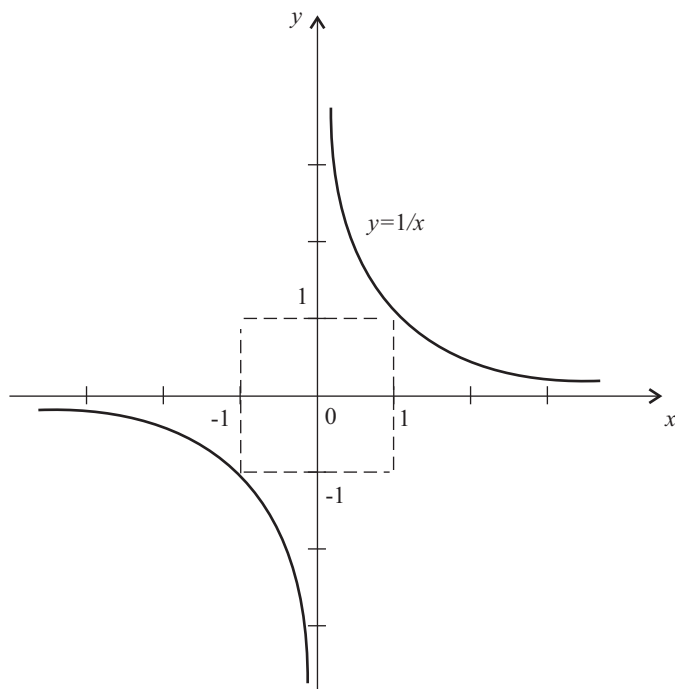


Рис. 5.

1) Так как эта дробь не имеет смысла при $x = 3$, то *область определения функции* X состоит из двух бесконечных интервалов: $(-\infty; 3)$ и $(3; +\infty)$.

2) Для того, чтобы изучить поведение функции на границе области определения (то есть при $x = 3$ и при $x \rightarrow \pm\infty$) полезно преобразовать данное выражение в сумму двух слагаемых следующим образом:

$$y = \frac{2x + 4}{x - 3} = \frac{(2x - 6) + 10}{x - 3} = \frac{2(x - 3)}{x - 3} + \frac{10}{x - 3} = 2 + \frac{10}{x - 3}.$$

Поскольку первое слагаемое — постоянное, то поведение функции на границе фактически определяется вторым, переменным, слагаемым. Изучив процесс его изменения при $x \rightarrow 3$ и $x \rightarrow \pm\infty$, делаем следующие выводы относительно заданной функции.

а) При $x \rightarrow 3$ *справа* (то есть при $x > 3$) значение функции неограниченно возрастает: $y \rightarrow +\infty$; при $x \rightarrow 3$ *слева* (то есть при $x < 3$) значение функции, оставаясь отрицательным, неограниченно возрастает по модулю: $y \rightarrow -\infty$. Таким образом, искомая гипербола неограниченно приближается к прямой с уравнением

$x = 3$ — слева снизу и справа сверху — и, тем самым, эта прямая является *вертикальной асимптотой* гиперболы.

б) При $x \rightarrow \pm\infty$ второе слагаемое неограниченно убывает, поэтому значение функции неограниченно приближается к первому, постоянному, слагаемому, то есть к значению $y = 2$. При этом график функции неограниченно приближается — *слева снизу и справа сверху* — к прямой, задаваемой уравнением $y = 2$; тем самым, эта прямая является *горизонтальной асимптотой* гиперболы.

Замечание. Полученные в этом пункте сведения являются важнейшими для характеристики поведения графика функции в удаленной части плоскости (фигурально выражаясь, *на бесконечности*).

Далее рассмотрим другие свойства этой функции и ее график.

3) Полагая $x = 0$, находим $y = -\frac{4}{3}$. Поэтому искомая гипербола пересекает ось Oy в точке $M_1 = (0; -\frac{4}{3})$.

4) Нуль функции ($y = 0$) будет при $x = -2$; следовательно, эта гипербола пересекает ось Ox в точке $M_2(-2; 0)$.

5) Дробь положительна, если числитель и знаменатель одного и того же знака, и отрицательна, если они разных знаков. Решая соответствующие системы неравенств, находим, что функция имеет два интервала положительности: $(-\infty; -2)$ и $(3; +\infty)$ и один интервал отрицательности: $(-2; 3)$.

6) Представление функции в виде суммы двух слагаемых (см. п. 2) позволяет достаточно легко обнаружить два интервала убывания: $(-\infty; 3)$ и $(3; +\infty)$.

7) Очевидно, что экстремумов у данной функции нет.

8) Множество Y значений этой функции: $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$.

9) Четности, нечетности, периодичности также нет.

Собранной информации достаточно, чтобы *схематично* изобразить гиперболу, *графически* отражающую свойства данной функции (рис. 6).

Функции, рассмотренные до этого момента, носят названия *алгебраических*. Перейдем теперь к рассмотрению *трансцендентных* функций.

Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

На рис. 7 изображены графики четырех показательных функций при различных основаниях a .

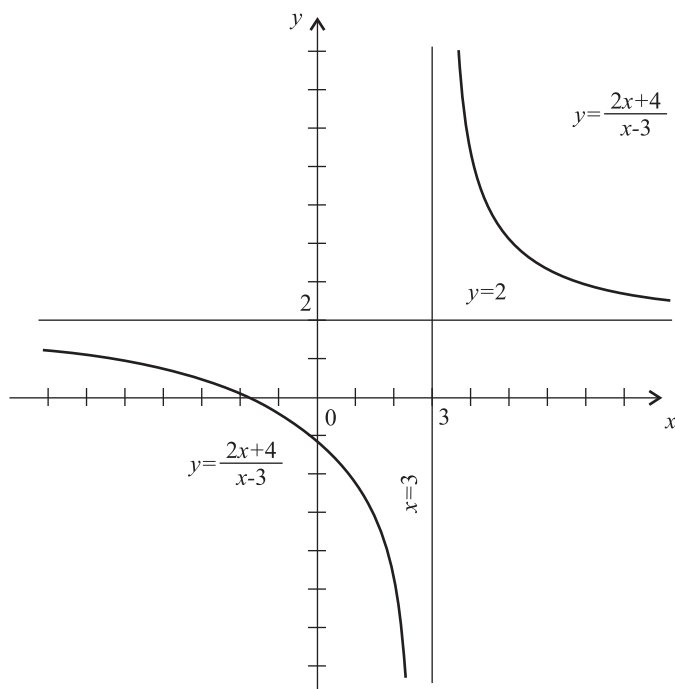


Рис. 6.

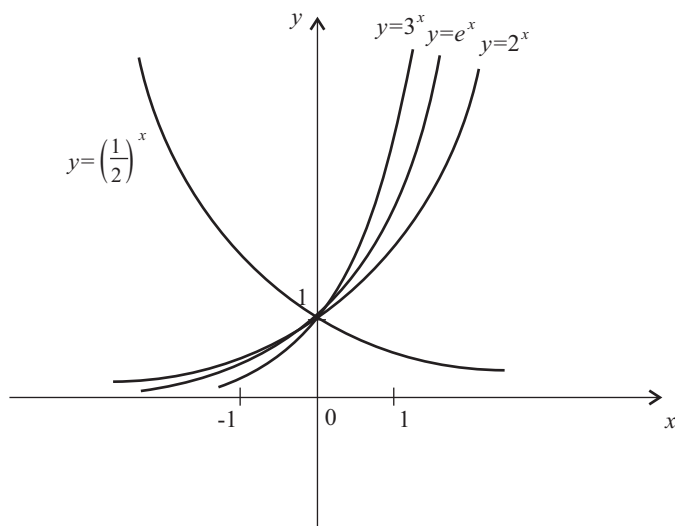


Рис. 7.

Напомним, что $e \approx 2,7$, то есть имеет место следующее неравенство: $2 < e < 3$; поэтому график функции $y = e^x$ расположен между графиками функций $y = 2^x$ и $y = 3^x$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

На рис. 8 изображены графики четырех логарифмических функций при различных основаниях a .

Логарифм по основанию e называется *натуральным* логарифмом, для него принято специальное обозначение: $\log_e x \equiv \ln x$.

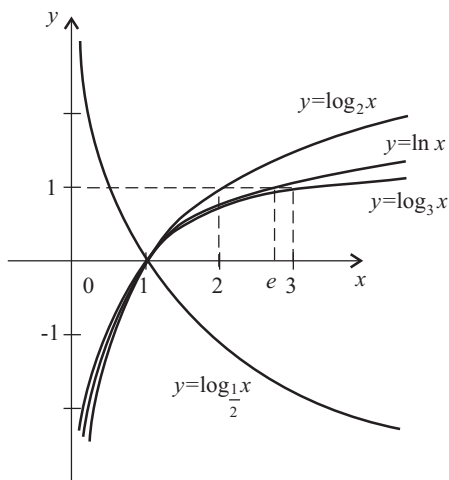


Рис. 8.

Поскольку соотношение $y = \log_a x$, по определению логарифма, равносильно равенству $x = a^y$, то функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ взаимно обратные. Поэтому для построения логарифмических кривых достаточно зеркально отразить графики соответствующих показательных функций, изображенные на рис. 7, относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Тригонометрические функции

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x.$$

При изучении тригонометрических функций в математическом анализе необходимо иметь в виду, что аргумент x , рассматриваемый в качестве меры угла, всегда выражается в *радианах*. Вообще, для измерения одной и той же математической или физической величины могут применяться различные системы счисления. Например, расстояние от Российского университета дружбы народов до станции метро Беляево — 2 км, или 2000 метров, или 20 минут ходьбы пешком, или 2 минуты

езды на автомобиле. Одно и то же расстояние можно измерить разными числами. Равно ли это расстояние 2 или 2000, зависит от того, что принято за единицу отсчета. Вот как образно в одном из стихотворений высказался на эту тему русский поэт прошлого столетия Леонид Мартынов: «Наш путь в тайгу, непроходимый путь, не верстами — столетьями я мерю». ¹⁾

В элементарной тригонометрии при измерении углов за единицу отсчета чаще всего принимают центральный угол окружности, опирающийся на дугу, составляющую одну триста шестидесятую часть окружности, — говорят, что этот угол равен одному *градусу* (такая система счисления называется *градусной*). Но известна и другая система счисления углов, когда за единицу отсчета принимают центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, — этот угол называется *радианом* (*радианная* система измерения углов). Угол в 1 радиан равен углу в $\frac{180}{\pi} \approx 57$ градусов, а угол в 180 градусов равен углу в $\pi \approx 3,14$ радиана.

Еще раз повторим, что в дальнейшем изложении мы будем полагать, что мера углов радианная.

На рис. 9, а представлены графики двух тригонометрических функций — *синусоида* и *косинусоида*.

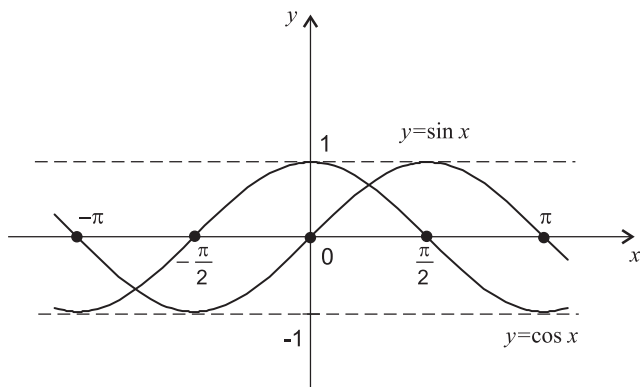


Рис. 9, а

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (*тангенсоида* и *котангенсоида*) представлены на рис. 9, б (на одном периоде).

¹⁾ Закончим эту тему на шутливой ноте. В супермаркете расточительные посетители нередко движутся со скоростью, превышающей сто рублей в минуту.

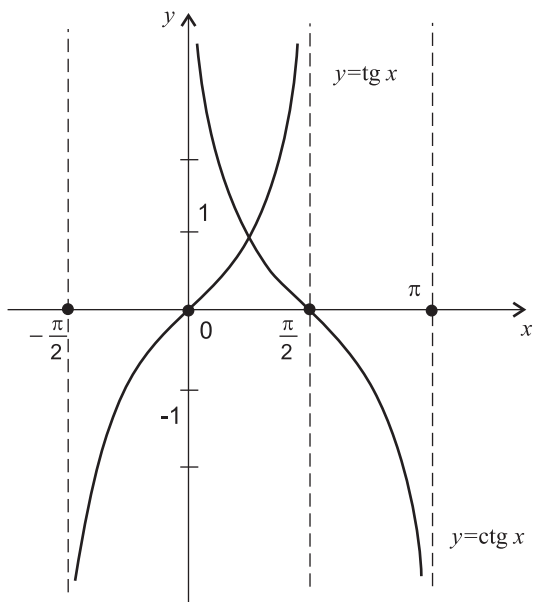


Рис. 9, б

Обратные тригонометрические функции:

$$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x.$$

Как свидетельствует само название, эти функции являются обратными по отношению к соответствующим тригонометрическим функциям. Например, соотношение $y = \arccos x$ равносильно тому, что $x = \cos y$ (при этом y как радианная мера угла удовлетворяет ограничению: $0 \leq y \leq \pi$). Поэтому для построения графиков обратных тригонометрических функций следует прибегнуть к уже испытанному приему: зеркально отразить, соответственно, синусоиду, косинусоиду, тангенсоиду и котангенсоиду относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, сохранив ту часть графиков, которая отвечает главным значениям угла (для арккосинуса они указаны выше в скобках). Графики обратных тригонометрических функций приведены на рис. 10.

§ 3. Класс элементарных функций

После того, как мы рассмотрели *основные* элементарные функции, становится возможным обозреть *все множество* элементарных функций, которое является главным предметом изу-

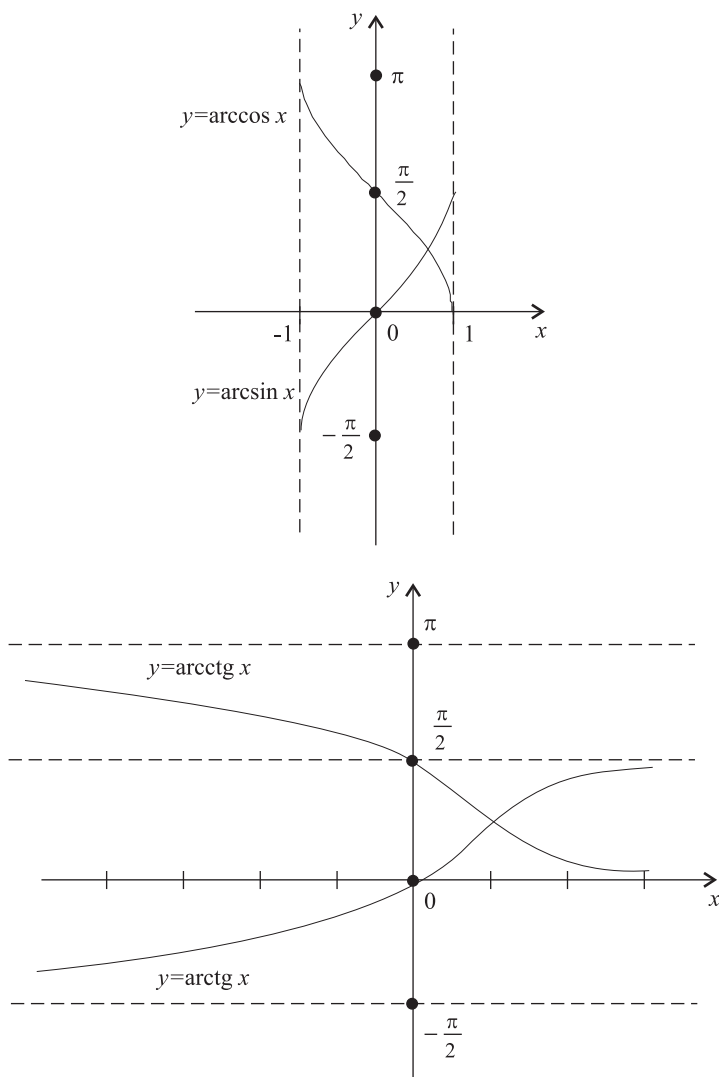


Рис. 10.

чения в математическом анализе. Коротко говоря, функции, составляющие это множество, получаются из основных элементарных функций следующими двумя способами:

а) во-первых, они образуются в итоге конечного числа арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления), выполненных над различными функциями рассмотренных типов;

б) во-вторых, они могут быть образованы в результате так называемой *суперпозиции функций*, то есть так, что берется *функция от функции*; полученная таким образом функция называется *сложной функцией* от x .

Поясним сказанное на *примерах*.

$$\text{а) } y = \frac{x^2 + 2}{x + 1}, y = xe^x, y = \frac{\sin x}{x};$$

$$\text{б) } y = \sqrt{1 - x^2}, y = \ln \operatorname{tg} x, y = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Стоит обратить внимание на то, что последняя из представленных сложных функций фактически определяет заданную *сложным образом* функцию $y = \cos x$. Разумеется, возможность такого рода упрощения является исключением; мы привели этот пример для того, чтобы показать, что, характеризуя функцию как сложную, мы имеем в виду не столько природу функциональной зависимости y от x , сколько способ задания этой зависимости.

Приведем пример функции, которая по принятой классификации не является элементарной. На рис. 11 представлен график функции «модуль x »:

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

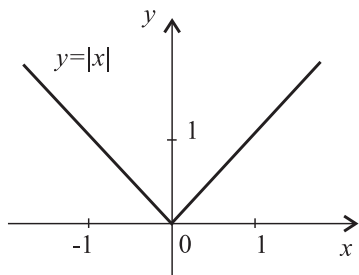


Рис. 11.

В заключение еще раз подчеркнем, что понятие функции — важнейшее в математике, является незаменимым средством решения прикладных задач. Поэтому овладеть различными приемами исследования функций следует каждому, кто рассчитывает применять математические методы для решения своих профессиональных задач. Понятие функции в значительной степени имеет и глубокое

философское содержание; что касается математики, то, помимо прочего, оно реализует внутреннее, глубинное *триединство* математики как науки, соединяя воедино *трех китов*, на которых истари держится математика — *алгебра, геометрия, математический анализ*.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется функцией? Что значит задать функцию $y = f(x)$?
2. Дайте определение графика функции.
3. Что называется интервалом знакопостоянства функции? Дайте геометрическую интерпретацию этого свойства функции.
4. Что называется нулем функции? Дайте геометрическую интерпретацию этого свойства.
5. Какая функция называется четной? Нечетной? Монотонной? Периодической? Дайте геометрическую интерпретацию каждого из этих свойств.
6. Дайте определение сложной функции, приведите примеры.
7. Перечислите основные элементарные функции.
8. Начертите графики основных элементарных функций.
9. Дайте определение обратной функции; приведите примеры взаимно обратных функций.

Задания для аудиторной и домашней работы

А. Указать на оси Ox область определения для каждой из следующих функций:

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1) $y = \sqrt{\log_2 x}$; | 5) $y = \sin \sqrt{3 - x^2}$; |
| 2) $y = \sqrt{\cos x}$; | 6) $y = \operatorname{tg} \sqrt{3 - x^2}$; |
| 3) $y = \ln \sin x$; | 7) $y = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \sin 2x}$. |
| 4) $y = \sqrt{\arcsin x}$; | |

В. Построить графики следующих функций:

1.

- | | |
|-----------------------|-----------------------------|
| 1) $y = 2$; | 11) $y = x^2 - 4$; |
| 2) $y = x$; | 12) $y = -x^2$; |
| 3) $y = x + 2$; | 13) $y = x^2 - 4x + 3$; |
| 4) $y = 2x$; | 14) $y = -3x^2 + 10x - 3$; |
| 5) $y = -x$; | 15) $y = x^3$; |
| 6) $y = -3x$; | 16) $y = x^4$; |
| 7) $y = x - 3$; | 17) $y = x^4 + x^2$; |
| 8) $y = -2x + 4$; | 18) $y = x^3 + x$; |
| 9) $y = x^2$; | 19) $y = x^3 - x$. |
| 10) $y = (x - 4)^2$; | |

II.

- | | |
|------------------------------------|----------------------------|
| 1) $y = \sqrt{x}$; | 8) $y = \frac{1}{1-x}$; |
| 2) $y = \sqrt{x-1}$; | 9) $y = x + \frac{1}{x}$; |
| 3) $y = -\sqrt{x}$; | 10) $y = x $; |
| 4) $y = \sqrt{x-1}$; | 11) $y = x+1 $; |
| 5) $y = \sqrt{-x}$; | 12) $y = x-5 $; |
| 6) $y = \sqrt{4-x^2}$; | 13) $y = x x $; |
| 7) $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$; | 14) $y = \frac{ x }{x}$. |

III.

- | | |
|--------------------------|---|
| 1) $y = 2^x$; | 13) $y = \operatorname{tg} x$; |
| 2) $y = \frac{2^x}{2}$; | 14) $y = \operatorname{ctg} x$; |
| 3) $y = 2^{-x}$; | 15) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$; |
| 4) $y = e^x$; | 16) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$; |
| 5) $y = \log_2 x$; | 17) $y = \sin[\pi(\sin^2 x + \cos^2 x)]$; |
| 6) $y = \log_2 2x$; | 18) $y = \arcsin x$; |
| 7) $y = \log_2(-x)$; | 19) $y = \arccos x$; |
| 8) $y = \log_2 x^2$; | 20) $y = \operatorname{arctg} x$; |
| 9) $y = \log_2 2^x$; | 21) $y = \operatorname{arcctg} x$; |
| 10) $y = \ln x$; | 22) $y = \arcsin x + \arccos x$; |
| 11) $y = \sin x$; | 23) $y = \arcsin(\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x)$; |
| 12) $y = \cos x$; | 24) $y = 2^{\log_2 x}$. |

Указать, к каким типам относятся представленные здесь функции. Имеются ли среди них четные, нечетные, периодические; взаимно обратные; сложные?

С. Найти точки пересечения кривых, заданных следующими уравнениями:

- 1) $y = x^2 - 6x + 8$, $y = -6x + 8$;
- 2) $y = x^2 + 2x + 3$, $y = 2x + 3$;
- 3) $y = x^2 - 3x - 4$, $y = -3x - 4$;
- 4) $y = x^2 - 5x + 6$, $y = x^2 - 7x + 12$;
- 5) $y = x^2 - 4$, $x^2 + y^2 = 4$;
- 6) $y = x^2 - 9$, $x^2 + y^2 = 9$.

Сделать чертежи.

Д. Из однопараметрического семейства кривых, задаваемого уравнением:

$$y = x^2 - px,$$

начертить кривые при следующих значениях параметра: $p = 0$, $p = \pm 1$, $p = \pm 2$, $p = \pm 4$. На какой кривой лежат вершины построенных парабол?

Выполните те же задания для уравнения

$$y = -x^2 - px.$$

Е. Решите следующие задачи.

1) Успешно сдав сессию, студент устраивается на работу на одну неделю. Его ежедневный заработок изменяется по *линейному* закону: $S = an + b$, где S — сумма денег, заработанных в n -й день. По уговору в первый день он должен получить 500 рублей, на пятый день — 800 рублей. Сколько денег он получит за последний день работы? Сколько студент получит за всю работу?

2) За безбилетный проезд предлагается установить на автобусе *прогрессивную* систему штрафов по квадратичному закону: $S = an^2 + bn + c$, где S — сумма штрафа, взимаемого контролером на n -й остановке. Известно, что на первой после посадки остановке сумма штрафа составляет 10 рублей, на второй — 20 рублей, на третьей — 40 рублей. Какой пришлось бы заплатить штраф на пятой остановке? При каком числе остановок эта система оказывается либеральнее принятой в настоящее время ($S = \text{const} = 100$ рублей — независимо от числа остановок)?

3) Данные статистики позволяют предположить, что население некоего города ежегодно убывает по *дробно-линейному* закону: $P = \frac{an + b}{n}$, где P — численность населения в n -м по счету году. В первом по счету — 2001 году — население города составляло 1 миллион человек, в 2002 — 900 тысяч человек. Каким станет население этого неблагополучного города в 2100 году? Может ли оно, убывая и в дальнейшем, оказаться меньше 800 тысяч человек?

Задания для индивидуальной домашней работы № 5

В каждом задании N — номер вашего варианта.

I. Найти область определения следующих функций:

$$1) y = \sqrt{x^2 - N^2}; \quad 2) y = \frac{1}{\sin Nx}.$$

II. Построить графики следующих функций:

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1) $y = Nx - 2N$; | 4) $y = 2^{x-N}$; |
| 2) $y = x^2 + 2Nx$; | 5) $y = N - x^2$; |
| 3) $y = (N - 10) \sin x$; | 6) $y = \sqrt{N - x^2}$. |

III. Определить координаты точек пересечения графиков функций

$$y = Nx - 2N \text{ и } y = x^2 - 2N.$$

IV. Имеются ли такие значения аргумента x , при которых функции

$$y = \log_2(x - N + 1) \text{ и } y = x^2 - N^2$$

принимают одни и те же значения?

V. Решите тот же вопрос для функций

$$y = \sqrt{x} \text{ и } y = N \sin x$$

на отрезке $[0; 3\pi]$.

Глава 6

ФУНКЦИИ: ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

*И долго я блуждал, и часто утомленный,
Я думал о тебе, предел благословенный.*

А. Пушкин, Воспоминания в Царском Селе

С понятием предела мы знакомы применительно к последовательностям. Но что такое последовательность? Если мы вспомним, что значение каждого члена последовательности определяется его номером (то есть некоторым натуральным числом), то оказывается, что с функциональной точки зрения последовательность есть не что иное, как *функция натурального аргумента*. Это станет вполне очевидным, если для записи последовательности мы воспользуемся функциональной символикой: $u = f(n)$ и далее: $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$, ..., $u_n = f(n)$. При таком подходе можно рассматривать числовые последовательности как *частный случай* функций, в которых аргумент, изменяясь *дискретно*, принимает лишь целочисленные положительные значения. Между тем, в *общем случае* аргумент изменяется *непрерывно*, принимая любые действительные значения (из области определения функции). При этом непрерывный аргумент x в интересующих нас вопросах может изменяться двояко:

а) 1-й тип процесса характеризуется тем, что x неограниченно возрастает: $x \rightarrow \infty$ (при этом не исключается случай, когда x возрастает по модулю, оставаясь отрицательным: $x \rightarrow -\infty$).

б) 2-й тип процесса характеризуется тем, что x приближается сколь угодно близко к некоторому фиксированному значению x_0 : $x \rightarrow x_0$.

Определим понятие предела для каждого из этих случаев.

§ 1. Теория пределов

Определение предела

Пусть некоторое явление описывается функцией $y = f(x)$ с областью определения X .

а) Предполагая, что область определения X не ограничена справа, рассмотрим процесс 1-го типа, т.е. $x \rightarrow \infty$. Дадим следующее

Определение 1. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое число N (зависящее от ε), что для всех x , удовлетворяющих условию $x > N$, выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

В символической записи

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$$

Говорят так: при x , стремящемся к бесконечности, $f(x)$ стремится к b .

Для иллюстрации в качестве примера обратимся к дробно-линейной функции

$$y = \frac{2x + 4}{x - 3},$$

которую мы рассматривали в предыдущем параграфе (рис. 6). Рассуждая на интуитивном уровне, мы высказались в таком духе, что при неограниченном возрастании аргумента x (то есть $x \rightarrow +\infty$) значение функции $y = f(x)$ неограниченно приближается к числу 2 (то есть $y \rightarrow 2$). Теперь мы в состоянии придать этому утверждению точный смысл, обратившись к данному определению. Для доказательства соотношения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{x - 3} = 2$$

покажем, как в этом примере по заданному ε найти необходимое N . Так как

$$f(x) - 2 = \frac{2x + 4}{x - 3} - 2 = \frac{10}{x - 3},$$

то условие

$$|f(x) - 2| < \varepsilon$$

выполняется для всех x , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{10}{x - 3} < \varepsilon.$$

Решение этого неравенства имеет вид

$$x > 3 + \frac{10}{\varepsilon}.$$

Если в качестве N принять выражение, стоящее в правой части последнего неравенства, то, поскольку все три неравенства равносильны, требование, содержащееся в определении предела, будет выполнено.

Геометрическая интерпретация этого результата выражается в том, что при $x \rightarrow \infty$ гипербола, служащая графиком данной функции, асимптотически приближается к горизонтальной прямой $y = 2$.

б) Перейдем к процессу 2-го типа. Пусть точка x_0 принадлежит области определения X функции $y = f(x)$. Дадим следующее

Определение 2. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число δ (зависящее от ε), что для всех x ($x \neq x_0$), удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

В символической записи

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

Говорят так: *при x , стремящемся к x_0 , $f(x)$ стремится к b .*

Суть данного определения в том, что в нем заключена идея близости функции $f(x)$ к своему пределу b при условии близости аргумента x к своему предельному значению x_0 . Переменная величина близка к своему пределу, то есть к некоторому постоянному числу, если мала их разность (по модулю), — в этом случае мало расстояние между соответствующими точками на числовой оси.

Замечание. Иногда 2-й тип процесса подразделяют на два случая в зависимости от того, стремится ли x к x_0 *слева* (то есть оставаясь меньше, чем x_0) или *справа* (то есть оставаясь больше, чем x_0).

При вычислении пределов нет необходимости каждый раз действовать буквально по определению (как говорится, плясать от пюки) — так, как мы поступили в вышеприведенном примере, когда нашли зависимость между фигурирующими в определении предела величинами N и ε . Иногда достаточно простых рассуждений на интуитивном уровне. Например, для вычисления предела функции $y = x^2$ при x , стремящемся к 3, достаточно такого рассуждения: если x *близко* к 3, то x^2 *близко* к 3^2 ,

поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9.$$

Однако во многих случаях для нахождения пределов такого умозрительного подхода не достаточно. На помощь приходят разнообразные правила вычисления пределов, основанные на свойствах пределов; их изучение упростится после проведения некоторой предварительной классификации, к которой мы и переходим.

*Величины бесконечно малые, бесконечно большие
и ограниченные*

Начнем с того, что выделим несколько важных классов переменных величин.

Определение 3. *Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой в данном процессе, если она имеет предел, равный нулю: $\lim f(x) = 0$. (Если не указано, как изменяется x , принципиально возможен процесс любого типа).*

Поскольку в этом случае b равно нулю, то неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, определяющее предел, для бесконечно малой приобретает следующий вид:

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Разумеется, в конкретных задачах необходимо указывать процесс изменения аргумента — например, функция $y = (x - 1)^2$ — бесконечно малая при x , стремящемся к единице; в других случаях она таковой не является.

Следует иметь в виду, что наименование *бесконечно малая* не выражает размера величины (это не одна тысячная и даже не одна миллионная), а отражает лишь характер ее изменения как переменной в данном процессе.

Пример.

$$y = \frac{1}{x^2} \text{ при } x \rightarrow \infty; \quad y = e^x - 1 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Определение 4. *Переменная величина называется бесконечно большой, если в процессе изменения ее модуль становится (и остается таковым) больше любого сколь угодно большого положительного числа M : $|f(x)| > M$.*

Пример.

$$y = \frac{1}{x-2} \text{ при } x \rightarrow 2; \quad y = e^x - 1 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Переменная величина, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой, а переменная величина, обратная бесконечно большой, является бесконечно малой. Бесконечно большие величины не имеют предела. Это выражают записью

$$\lim f(x) = \infty.$$

Определение 5. *Функция называется ограниченной в данном процессе, если, начиная с некоторого момента, ее значения (по модулю) остаются меньше некоторого положительного числа M («момент» характеризуется числами N и δ , соответственно, в процессах 1-го и 2-го типов):*

$$|f(x)| < M.$$

Все функции, имеющие предел, и в частности, бесконечно малые, являются ограниченными, между тем как бесконечно большие — неограниченные.

Пример.

Функция $y = \sin x$ ограничена в любом процессе; напротив, $y = x \sin x$ при $x \rightarrow \infty$ — неограниченная величина, но не бесконечно большая.

Свойства бесконечно малых

Важную роль бесконечно малых в теории пределов выражает следующая

Теорема 1. *Всякая функция, имеющая предел, представима в виде суммы постоянной и бесконечно малой.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ имеет предел b . По определению предела, модуль разности функции и ее предела может быть сделан меньше любого сколь угодно малого положительного ε . Поэтому эта разность, обозначим ее $\varphi(x)$,

$$\varphi(x) = f(x) - b,$$

есть величина бесконечно малая и

$$f(x) = b + \varphi(x).$$

Теорема 2. Если функцию $y = f(x)$ можно представить в виде суммы постоянной величины b и бесконечно малой $\varphi(x)$, то $\lim f(x) = b$.

Перечислим другие свойства бесконечно малых.

1) Сумма, разность, произведение двух бесконечно малых являются бесконечно малыми.

2) Произведение бесконечно малой на постоянную есть бесконечно малая.

3) Произведение бесконечно малой на величину ограниченную есть величина бесконечно малая.

4) Произведение величины, имеющей конечный предел, на величину бесконечно малую, есть величина бесконечно малая.

Заметим, что отраженный в этих свойствах *приоритет* бесконечно малых интуитивно предсказуем (по аналогии с тем, как $0 + 0 = 0$, $7 \cdot 0 = 0$, $0 \sin x = 0$ и т. п.).

Покажем общий принцип доказательства этих свойств на примере произведения бесконечно малых.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — две бесконечно малые, например, при $x \rightarrow \infty$. Тогда для любого сколь угодно малого ε существует такое N_1 , что для всех x , удовлетворяющих условию $x > N_1$, выполняется неравенство $|\varphi(x)| < \varepsilon$. Аналогично, для числа 1 существует такое N_2 , что для всех x , отвечающих условию $x > N_2$, выполняется неравенство $|\psi(x)| < 1$. Наибольшее из чисел N_1 и N_2 примем за N . Тогда для всех x , удовлетворяющих условию: $x > N$, одновременно выполняются оба неравенства: $|\varphi(x)| < \varepsilon$, $|\psi(x)| < 1$. Следовательно, выполняется и неравенство, полученное их почленным умножением:

$$|\varphi(x)\psi(x)| < \varepsilon.$$

Полученное неравенство показывает, что *произведение* $\varphi(x)\psi(x)$ есть величина бесконечно малая.

Перечисляя свойства бесконечно малых, мы не случайно ни словом не обмолвились об *отношении двух бесконечно малых*. Дело в том, что без дополнительного исследования об отношении (другими словами, о частном) конкретных бесконечно малых ничего определенного сказать нельзя. Вначале каждое такое отношение представляет *неопределенность*, как условились говорить, *типа* « $\frac{0}{0}$ », которую нужно раскрыть. Аналогично, отношение или разность двух бесконечно больших также представляют *неопределенности типа* « $\frac{\infty}{\infty}$ » или *типа* « $\infty - \infty$ ». Вычислив предел переменной величины такой природы, мы определяем, какое место занимает данное отношение или разность в нашей классификации. Подчеркнем, что сами эти символы не имеют никакого числового смысла, они лишь указывают на наше понимание исходной проблемы. Раскрытие неопределенностей является одной из важных и содержательных задач в теории пределов.

Свойства пределов

Для вычисления пределов пользуются простыми правилами, основывающимися на свойствах пределов. Перечислим эти свойства.

1) Функция в одном процессе не может иметь более одного предела.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть функция в некотором процессе имеет два различных предела b_1 и b_2 . Тогда ее можно представить в виде суммы постоянной и бесконечно малой двумя разными способами:

$$f(x) = b_1 + \varphi(x) \text{ и } f(x) = b_2 + \psi(x), \quad b_2 > b_1.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(x) - \psi(x) = b_2 - b_1.$$

Разность двух бесконечно малых есть бесконечно малая, разность $b_2 - b_1$, по условию, положительное число. Но бесконечно малая переменная в процессе изменения (по модулю) становится меньше *любой* положительной постоянной, поэтому последнее равенство невозможно, и предположение о двух разных пределах исключается.

2) Предел постоянной равен ей самой (что вполне очевидно).

Продолжая перечисление свойств, обратим внимание на то, что функции, упоминаемые в каждом из следующих пунктов, рассматриваются в одном и том же процессе изменения независимой переменной.

3) Предел суммы (или разности) двух функций равен сумме (или разности) пределов этих функций.

4) Предел произведения двух функций равен произведению пределов перемножаемых функций (при этом постоянный множитель можно выносить за знак предела, п. 2).

5) Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций при условии, что предел делителя не равен нулю.

Суть этих свойств в том, что они допускают перестановочность операции предельного перехода и арифметических действий над функциями.

Приведем в качестве примера.

Доказательство свойства 4. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы b_1 и b_2 соответственно. Тогда каждая из этих функций представима в виде суммы постоянной и бесконечно малой:

$$f_1(x) = b_1 + \varphi_1(x), \quad f_2(x) = b_2 + \varphi_2(x).$$

Перемножая эти функции, получаем

$$f_1(x)f_2(x) = b_1b_2 + b_1\varphi_2(x) + b_2\varphi_1(x) + \varphi_1(x)\varphi_2(x).$$

Первое из четырех слагаемых в правой части есть произведение двух постоянных, обозначим его b . Каждое из остальных слагаемых является бесконечно малой, поэтому их сумма также является бесконечно малой, — обозначим ее $\varphi(x)$. Таким образом, для произведения данных функций получено выражение в виде суммы постоянной и бесконечно малой и, согласно теореме 2 о бесконечно малых, постоянная $b = b_1b_2$ является пределом данного произведения, что и доказывает свойство 4:

$$\lim[f_1(x)f_2(x)] = \lim f_1(x) \lim f_2(x).$$

Чтобы проиллюстрировать разные возможности, рассмотрим *пример*. Для функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

найдем $\lim f(x)$ в следующих пяти процессах:

$$1) x \rightarrow 3, \quad 2) x \rightarrow 2, \quad 3) x \rightarrow -1, \quad 4) x \rightarrow \infty, \quad 5) x \rightarrow 1.$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)} = \frac{0}{3} = 0.$$

3) При $x \rightarrow -1$ имеем $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 0$, поэтому свойство 5 неприменимо. Рассуждаем так: $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x + 2) = 6$, и поскольку числитель дроби стремится к 6, а знаменатель к нулю, то дробь *неограниченно возрастает* (по модулю) и предел *не существует*:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

В этом примере мы раскрыли неопределенность типа « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

5) При $x \rightarrow 1$ как числитель, так и знаменатель дроби являются бесконечно малыми. Неопределенность типа « $\frac{0}{0}$ » раскрывается следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

В процессе решения, выделив множитель, который обращает в нуль числитель и знаменатель, и, сократив на него при $x \neq 1$, мы избавились от неопределенности.

Перейдем к рассмотрению двух пределов, которые ввиду исключительной роли, принадлежащей им как в самой математике, так и в ее приложениях, называются *замечательными пределами*.

Первый замечательный предел

Так называется следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

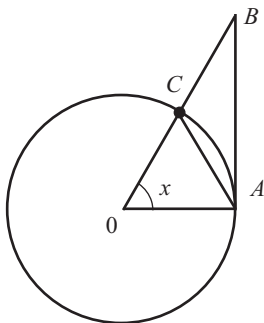


Рис. 1.

Доказательство. Обратимся к чертежу (рис. 1), на котором изображен круг с радиусом $OA = 1$ и касательной AB . Отрезок OB пересекает окружность в точке C . Известно, что радианная мера x угла AOC ($0 < x < \pi/2$) равна длине дуги AC , на которую этот угол опирается.

Удвоенные площади $2S$ следующих трех фигур связаны очевидными неравенствами:

$$2S_{\triangle OAC} < 2S \text{ сектора } OAC < 2S_{\triangle OAB}.$$

Выражая эти площади по известным из школьного курса формулам, получаем двойное неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Преобразуем это неравенство, разделив каждый его член на $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

При этом для обратных величин получается следующее равносильное неравенство:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

При x , стремящемся к нулю, $\cos x$ стремится к 1. По здравому смыслу ясно, что к такому же пределу должно стремиться и выражение, заключенное между $\cos x$ и единицей. Так обосновывается первый замечательный предел.

Полученная формула имеет многочисленные применения. Приведем примеры (очевидные пояснения, относящиеся к несложным тригонометрическим преобразованиям, мы опускаем, оставляя их читателю).

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2t}{4t^2} = \frac{1}{2}.$$

Выполненная в этом примере подстановка (замена переменных): $x = 2t$ ($t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$) сводит этот предел к предыдущему.

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Здесь использованы результаты предыдущих примеров.

Второй замечательный предел

Первоначально число e мы определили (глава 4) как предел числовой последовательности

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Оказывается, что справедлив и более общий результат:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Это и есть *второй замечательный предел*.

В этой формуле аргумент x стремится к бесконечности, принимая произвольные действительные значения, между тем как в первой записи n — номер последовательности, т. е. натуральное число. Поэтому применимость второй формулы неизмеримо шире. В более подробных руководствах по математическому анализу доказывается, что она сохраняет силу и при $x \rightarrow -\infty$.

Если перейти к новой независимой переменной t по формуле

$$x = \frac{1}{t} \text{ при } x \rightarrow \infty, t \rightarrow 0,$$

то второй замечательный предел запишется в другой равносильной форме:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

В итоге мы перешли от 1-го типа процесса ко 2-му.

Второй замечательный предел имеет многочисленные приложения. В теории пределов он применяется для раскрытия неопределенности типа « 1^∞ ».

Рассмотрим *примеры*.

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4} \cdot \frac{4x}{x-1}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{4+t} = e^4. \end{aligned}$$

В этом примере, выполнив тождественные преобразования под знаком предела, мы сделали подстановку

$$t = \frac{4}{x-1}, \text{ где } t \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

После этого выражение в скобках стремится к e , а показатель степени стремится к 4, что и обосновывает ответ.

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[t \ln \left(1 + \frac{1}{t}\right)\right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right] = \\ &= \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \ln e = 1. \end{aligned}$$

Здесь имеется первоначальная *неопределенность типа* $\frac{0}{0}$. Применяя подстановку

$$t = \frac{1}{x}, \text{ где } t \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow 0,$$

приходим к *неопределенности типа* $\infty \cdot 0$. Затем по свойству логарифма сводим задачу к *неопределенности типа* 1^∞ и далее, применяя второй замечательный предел, получаем ответ.

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

Этот предел фактически сводится к предыдущему подстановкой

$$t = e^x - 1, \quad x = \ln(1+t), \text{ где } t \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Сравнение бесконечно малых

Мы часто произносим сакраментальную фразу: «*Все познается в сравнении*». «У меня в бумажнике *порядка* 100 рублей» — говорим мы в случае, когда на самом деле там 98 или 105 рублей.

Сравнивая два числа A и B , обычно рассматривают их отношение: $\frac{A}{B}$. А как сравнить переменные величины, например, две бесконечно малые в одном и том же процессе? При фиксированном значении x каждая из них принимает определенное числовое значение; однако отношение этих чисел ничего не говорит о соотношении этих бесконечно малых при других значениях x . Точное представление об истинном соотношении между бесконечно малыми дает лишь *предел* их отношения в том же самом процессе. При сравнении бесконечно малых применяются следующие определения.

Определение 6. Будем говорить, что две бесконечно малые $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ одного порядка, если предел их отношения $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ отличен от нуля; если при этом он равен единице, то бесконечно малые называются эквивалентными (обозначение $\varphi(x) \sim \psi(x)$).

Эквивалентность отражает *похожесть* бесконечно малых в одном и том же процессе, их *приближенное равенство*; это обстоятельство позволяет во многих случаях заменять одну бесконечно малую другой, ей эквивалентной.

Определение 7. Будем говорить, что $\varphi(x)$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\psi(x)$, если предел

отношения $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ равен нулю (т. е. если это отношение само есть величина бесконечно малая). При этом $\psi(x)$ — бесконечно малая низшего порядка по сравнению с $\varphi(x)$. Принято следующее обозначение: $\varphi = o(\psi)$.

Рассмотрим пример. Прежде всего убедимся в том, что две функции

$$\varphi(x) = 3x^2 - 4x + 1, \quad \psi(x) = -x^2 + 4x - 3$$

являются бесконечно малыми при $x \rightarrow 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 4x + 1) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \psi(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 4x - 3) = 0. \end{aligned}$$

Сравним эти бесконечно малые. Для этого найдем предел их отношения при $x \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{-x^2 - 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x-1)}{(x-1)(3-x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{3-x} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно определению 6, данные функции при $x \rightarrow 1$ являются эквивалентными бесконечно малыми.

Далее, рассмотрим предел отношения разности этих бесконечно малых к одной из них, например, к $\varphi(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x-1)^2}{3x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x-1)}{3x-1} = 0.$$

Этот ответ подтверждает следующую важную закономерность: *разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них.*

Применив новые категории сравнения к некоторым из рассмотренных ранее пределов, получим следующие важные в математике и ее приложениях эквивалентности при $x \rightarrow 0$ и соответствующие приближенные равенства:

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}; \\ \sin x &\approx x, \quad e^x \approx 1 + x, \quad \ln(1+x) \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Практическая значимость этих четырех формул состоит в том, что при малых значениях аргумента x они позволяют при-

ближенно заменить трансцендентные функции на существенно более простые функции: линейные или квадратичные. При этом погрешность оказывается бесконечно малой величиной более высокого порядка.

В каждом из этих случаев *две эквивалентные бесконечно малые разнятся между собой на бесконечно малую высшего порядка*. Например, первый замечательный предел показывает, что имеет место соотношение

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — некоторая бесконечно малая. Поэтому точное равенство имеет вид

$$\sin x = x + x\varphi(x).$$

Здесь произведение $x\varphi(x)$ есть *бесконечно малая высшего порядка* по сравнению с x . Аналогично можно представить и три другие функции.

§ 2. Непрерывные функции

Всякий раз, оценивая неизбежные с течением времени изменения в окружающем нас мире, да и в нас самих, мы пытаемся проанализировать происходящие процессы, чтобы выделить их наиболее существенные черты. Одним из первых на этом пути встает вопрос: *как* происходит характерное для данного процесса изменение — *непрерывно* или *дискретно*, то есть скачкообразно. Плывет лягушка или прыгает, равномерно ли понижается курс валюты или *обваливается*, происходит ли перманентная эволюция или революционный скачок? Чтобы унифицировать качественные и количественные оценки происходящего, следует абстрагироваться от конкретного содержания и изучить проблему в терминах функциональной зависимости. Это позволяет сделать теория пределов.

Определение непрерывности

Пусть некоторое явление описывается функцией $y = f(x)$ и точка x_0 принадлежит области определения X . Дадим

Определение 8. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной при $x = x_0$, если выполняется условие*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Здесь четко проступает идея близости, о которой мы говорили выше, когда вводилось понятие предела. При неограниченном

приближении аргумента x к предельному значению x_0 , непрерывная при x_0 функция $f(x)$ сколь угодно близко приближается к предельному значению $f(x_0)$.

Остановимся на двух аспектах этого определения. Во-первых, в данном процессе должен существовать предел, и, во-вторых, этот предел должен быть равен значению функции в предельной точке x_0 . Если хотя бы одно из этих условий нарушено, то говорят, что в точке x_0 функция имеет *разрыв*.

Такая терминология соответствует интуитивному *геометрическому* представлению о непрерывности и разрыве кривой, служащей графиком функции. Мы вычерчиваем график функции через точку непрерывности, не отрывая руки, между тем как в точке разрыва приходится отрывать руку.

Обращаясь к определению предела в случае процесса 2-го типа, опишем непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0 посредством неравенств. Тогда *определение* непрерывности примет следующую, равносильную предыдущему, форму:

Определение 9. *Функция $y = f(x)$ непрерывна при $x = x_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число δ , что для всех значений x , удовлетворяющих условию*

$$|x - x_0| < \delta$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Разности в двух последних неравенствах имеют специальные обозначения и названия: $x - x_0 \equiv \Delta x$ называется *приращением аргумента*, а разность $f(x) - f(x_0) \equiv y - y_0 \equiv \Delta y$ — *приращением функции* (читается, соответственно, «дельта икс» и «дельта игрек»). Смысл приращения аргумента и приращения функции ясен из рис. 2.

В терминах *приращений* определение непрерывности принимает наиболее простую форму: *функция непрерывна при $x = x_0$, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции*:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

то есть при Δx стремящемся к нулю, Δy также стремится к нулю. При этом переменная точка $M(x; y)$ стремится по графику функции к точке $M_0(x_0; y_0)$.

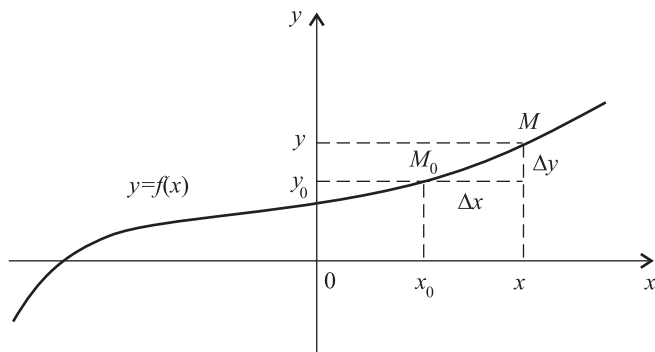


Рис. 2.

Например, функция $y = x^2$ непрерывна при $x_0 = 3$, поскольку при $\Delta x = x - 3$, стремящемся к нулю, приращение функции $\Delta y = x^2 - 3^2$, равное произведению $(x - 3)(x + 3)$, также стремится к нулю.

Вспоминая соответствующие свойства пределов, заключаем, что функция, являющаяся результатом арифметических действий над непрерывными в одной и той же точке функциями, также непрерывна (для частного требуется, чтобы в этой точке делитель был отличен от нуля).

Точки разрыва

Определение 10. Точки, в которых нарушаются условия непрерывности функции, называются точками разрыва.

В этих точках исчезает непрерывность графика и нет возможности провести его, не отрывая руки, единым росчерком пера. Приведем примеры.

Пример 1.

Рассмотрим функцию (рис. 3)

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0).$$

Предел этой функции при x , стремящемся к нулю (*первый замечательный предел*), существует, но не равен значению функции в предельной точке, так как при $x = 0$ функция не определена, ибо на нуль делить нельзя. По этой причине при $x = 0$ условие непрерывности нарушено, и функция имеет разрыв. Впрочем, его легко устранить — достаточно *доопределить* данную функцию, положив ее равной своему пределу в этой точке, то есть единице. Такой разрыв называется *устранимым*. До устранения разрыва на графике (рис. 3) точка

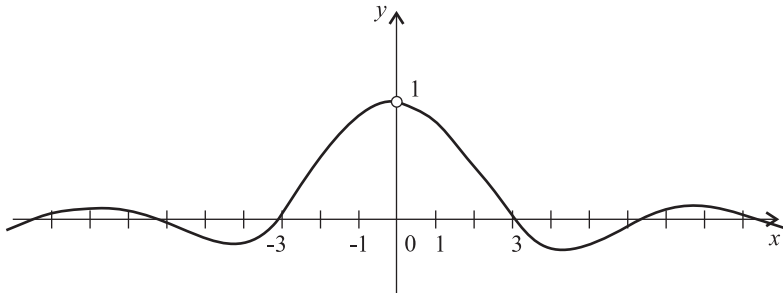


Рис. 3.

$(0; 1)$ была *выколота*, после устранения разрыва ее следует присоединить к графику.

Пример 2.

Рассмотрим следующую функцию (рис. 4):

$$y = \frac{|x|}{x} \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

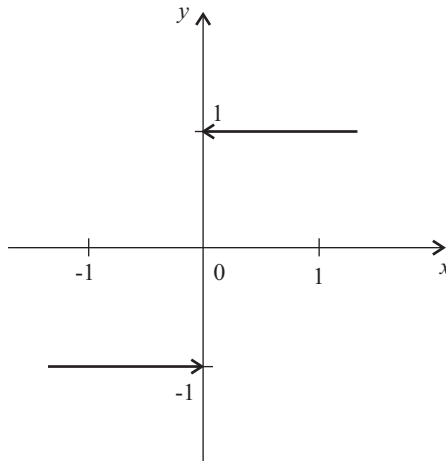


Рис. 4.

При x , стремящемся к нулю *справа*, то есть по положительным значениям, функция имеет предел, равный 1; а при x , стремящемся к нулю *слева*, она имеет предел, равный -1 . Поскольку единого предела не существует, непрерывности в предельной точке нет; говорят, что в этой точке функция производит *скачок*. Доопределить такую функцию при $x = 0$ так, чтобы она стала в этой точке непрерывной, невозможно. График состоит из

двух полупрямых; разумеется, нарисовать его единым росчерком нельзя. Такой разрыв называется *ступенчатым разрывом*, который относится также к разрывам первого рода.

Это были примеры *точек разрыва 1-го рода*.

Пример 3.

Разрыв 2-го рода имеет хорошо известная нам функция $y = \frac{1}{x}$, выражающая обратно пропорциональную зависимость. Эта функция при $x \rightarrow 0$ бесконечно большая, конечного предела не существует ни слева, ни справа, и говорить о непрерывности не приходится.

Функции, непрерывные на отрезках

Говорят, что *функция непрерывна на некотором множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества*. График такой функции — *непрерывная линия*, которая вычерчивается одним росчерком пера.

Все основные элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Функции, непрерывные на *отрезках*, обладают рядом важных отличительных свойств. Сформулируем теоремы, выражающие два из них.

Теорема Коши. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то между a и b найдется такая точка c , в которой функция обращается в нуль:*

$$f(c) = 0 \quad (a < c < b).$$

Геометрический смысл этой теоремы очевиден: если непрерывная кривая переходит с нижней полуплоскости на верхнюю (или наоборот), то по крайней мере в одной точке она обязательно пересечет ось Ox (рис. 5).

Теорема Вейерштрасса. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке найдутся такие точки (обозначим их c и d), в которых функция принимает наибольшее M и наименьшее m значения на этом отрезке:*

$$m \leq f(x) \leq M \quad (a \leq x \leq b).$$

При этом множество значений функции есть отрезок $[m; M]$. График функции располагается в прямоугольнике, ограниченном вертикальными прямыми: $x = a$, $x = b$ и горизонтальными прямыми: $y = m$, $y = M$ (рис. 6).

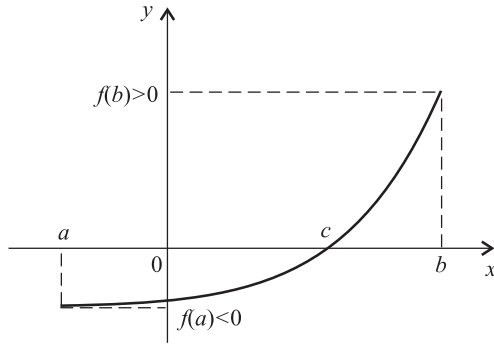


Рис. 5.

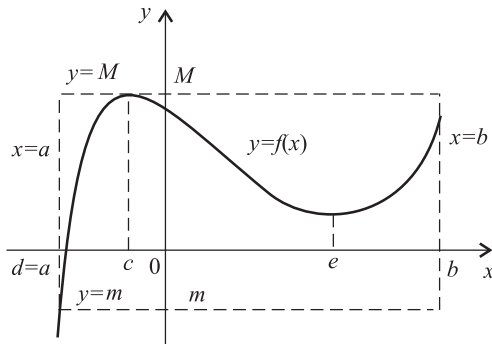


Рис. 6.

Замечание. В точке e функция имеет минимум, но не наименьшее значение на отрезке.

Вот как (рис. 7), воспользовавшись геометрической интерпретацией бесконечно больших, можно графически выразить наше представление о том, что *нет предела совершенству* (*perfectum: $P=P(t)$*).

«Под занавес» позволим себе два шутильных лирических отступления.

А вот как (рис. 8), воспользовавшись геометрической интерпретацией бесконечно малых, можно графически выразить грустное наблюдение древних: *Sic transit Gloria mundi...* — Так проходит земная слава... (*gloria: $G=G(t)$*).

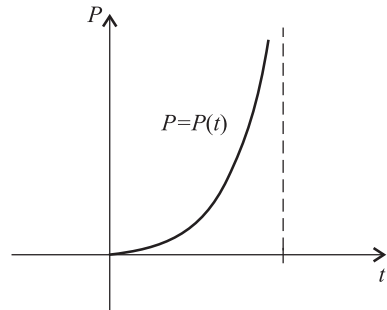


Рис. 7.

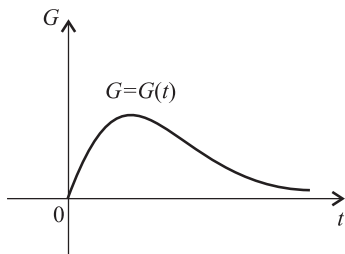


Рис. 8.

В заключение еще раз подчеркнем, что рассмотренное в этом параграфе понятие предела функции (и связанной с ним непрерывности) является основополагающим в высшей математике. Поэтому важно и принципиальное знание пределов, и умение их вычислять. В той или иной форме понятие предела лежит в основе важнейших разделов ма-

тематического анализа — дифференциального и интегрального исчисления.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется пределом функции при $x \rightarrow x_0$? Записать это определение в разных формах и истолковать геометрически.

2. Что называется пределом функции при $x \rightarrow \infty$? Записать это определение в разных формах и истолковать геометрически.

3. Какая переменная величина называется бесконечно малой в данном процессе? Записать определение в разных формах и дать геометрическое истолкование.

4. Как сравниваются между собой бесконечно малые величины?

5. Какие бесконечно малые называются эквивалентными?

6. Какая переменная величина называется бесконечно большой в данном процессе? Истолковать это понятие геометрически.

7. Какая связь между понятиями бесконечно малой и бесконечно большой?

8. Перечислить правила предельного перехода при арифметических действиях.

9. Какие виды неопределенности вам известны?

10. Какой предел называется первым замечательным пределом?

11. Чему приближенно равен $\sin x$ при малых значениях x ?

12. Какой предел называется вторым замечательным пределом?

13. Каково приближенное значение числа e ?

14. Какая функция называется непрерывной в точке? Записать определение в разных формах и дать геометрическое истолкование.

15. Какая точка называется точкой разрыва функции? Приведите примеры.

16. Какая функция называется непрерывной на интервале? На отрезке? Как непрерывность функции отражается на ее графике?

17. Перечислите свойства функций, непрерывных на отрезке.

18. Сохраняются ли эти свойства для функций непрерывных на интервале? Приведите примеры.

19. Дайте геометрическую интерпретацию свойств функций, непрерывных на отрезке.

Задания для аудиторной и домашней работы

A. Вычислить пределы:

I.

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{3x - 1};$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{2x + 2};$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{2x + 1};$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3}{x - 5};$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 6}{3x^2 + 5};$

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 5}{x^2 - 3};$

9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 1};$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{x^2 + 5};$

11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^2 + 2x - 18}{14x^2 - 4x + 9};$

12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 11x + 3}{2x^3 - 11};$

13) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{2x + 1} - \frac{x^2 - 3}{x - 5} \right);$

14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 5}{3x + 6} - \frac{x^2 - 3}{x + 2} \right);$

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x} - \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} \right).$

II.

1) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 - 3x - 28}{x^2 + 5x - 14};$

2) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^2 + 14x - 3}{x^2 + 5x + 6};$

3) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^3 + 27};$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 - 5x - 3};$

7) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{5 + 4x} - 5}{x - 5};$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3 - x}};$

9) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 17} - 4}{x + 1};$

10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6 - x} - x}{\sqrt{6 - x} - 2};$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 100}{x^3 - 1000}; & 11) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2-x}}{1 - \sqrt{2-x}}. \\
 6) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 7x - 10}{4x^2 + 11x - 15};
 \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}; & 11) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)^x; \\
 2) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x}; & 12) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x^2}; \\
 3) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}; & 13) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}; \\
 4) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}; & 14) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}; \\
 5) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2}; & 15) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}; \\
 6) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}; & 16) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}; \\
 7) \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}}; & 17) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}; \\
 8) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x; & 18) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}; \\
 9) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}; & 19) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}. \\
 10) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x};
 \end{aligned}$$

В. Найти точки разрыва и определить характер разрыва (устранимый, ступенчатый, бесконечный):

$$\begin{aligned}
 1) \quad & y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}; & 7) \quad & y = \frac{|x - 3|}{x^2 - 3x}; \\
 2) \quad & y = \frac{x^2 - 3x - 28}{x^2 + 5x - 14}; & 8) \quad & y = \frac{3}{x - 2}; \\
 3) \quad & y = \frac{x^2 - x - 12}{x^3 + 27}; & 9) \quad & y = \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}; \\
 4) \quad & y = \frac{\sin 2x}{x}; & 10) \quad & y = 2^{\frac{1}{x}}; \\
 5) \quad & y = \frac{|x - 2|}{x - 2}; & 11) \quad & y = e^{\frac{1}{x}}. \\
 6) \quad & y = \frac{|3x|}{x};
 \end{aligned}$$

Сделать чертеж.

С. Выразить приращение функции Δy через приращение аргумента Δx для следующих функций при произвольном значении x :

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| 1) $y = x^2$; | 5) $y = x^4$; |
| 2) $y = 3x^2$; | 6) $y = \frac{1}{x-1}$; |
| 3) $y = 3x^2 + 4x - 11$; | 7) $y = \sqrt{x+1}$. |
| 4) $y = x^3$; | |

Убедиться в непрерывности функций.

Вычислив $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, выяснить в каких задачах при $\Delta x \rightarrow 0$, приращения Δy и Δx — бесконечно малые одного порядка.

Д. Применяя теорему Коши, найти приближенное значение корней уравнений:

$$1) x^2 - 6x + 1 = 0; \quad 2) 3x^2 - 12x + 2 = 0.$$

Задания для индивидуальной домашней работы № 6

В каждом задании N — номер вашего варианта.

А. Вычислить пределы:

- | | |
|--|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Nx^2 + 2x}{2x^2 + N}$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{Nx}$; |
| 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^N + x^3 + 1}{x^{10} + Nx}$; | 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Nx}{x}$; |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (N+1)x + N}{x^2 - 1}$; | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + Nx)^{\frac{2}{x}}$; |
| 4) $\lim_{x \rightarrow N} \frac{x^2 - (N+2)x + 2N}{x^3 - N^3}$; | 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{Nx + 3}{Nx} \right)^x$. |
| 5) $\lim_{x \rightarrow -N} \frac{\sqrt{x + N + 9} - 3}{x + N}$; | |

В. Определить характер точек разрыва следующих функций:

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1) $y = \frac{x^2 - N^2}{x + N}$; | 3) $y = \frac{x^2 - (N+1)x + N}{x^2 - N^2}$; |
| 2) $y = \frac{3}{x - N}$; | 4) $y = \frac{ x - N }{x - N}$. |

Построить графики этих функций.

С. Для следующих функций выразить приращение функции Δy через приращение аргумента Δx при $x = 0$. Для каждой из них найти также отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $x = 0$ и вычислить предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

1) $y = (x + N)^2$;

2) $y = (2x - N)^3$.

Глава 7

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

*Это почти неподвижности мука
Мчаться куда-то со скоростью звука,
Зная прекрасно, что есть уже где-то
Некто, летящий со скоростью света!*

Л. Мартынов

В повседневной жизни, сталкиваясь с теми или иными явлениями в природе и обществе, наблюдая события и участвуя в общественной жизни, мы сплошь и рядом оперируем такими качественными оценками, как *быстро* и *медленно*. Сравнивая разные процессы, заметим, что одни из них протекают *быстрее*, другие *медленнее*. В «Золотом теленке» И. Ильф и Е. Петров, описывая лучезарные, сверхъестественные улыбки, которыми поочередно одаривали друг друга два «великих комбинатора», вспоминают партитуру композитора Ференца Листа, где на первой странице указано играть *быстро*, на второй — *очень быстро*, на третьей — *гораздо быстрее*, на четвертой — *быстро как только возможно*, а на пятой — *еще быстрее!* В обиходе, оценивая те или иные процессы, мы задаемся вопросом: какова скорость происходящего процесса? Это касается движения автомобиля или лайнера, падения уровня смертности или рождаемости, роста биржевого курса акций или курса валюты, и многого, многого другого. С точки зрения математики эти примеры допускают единообразный подход к поискам ответа на поставленный вопрос о скорости. Скажем сразу, что применяемый при этом математический аппарат оказывается неизмеримо более мощным, чем требуется для решения этой конкретной задачи, — его потенциальные возможности фактически простираются существенно дальше, фактически во все сферы деятельности, в которых применяется современная математика.

Задача о скорости движения в элементарной и высшей математике

Первые из приведенных выше примеров относятся к механическому движению — они наиболее простые и понятные даже ребенку. Поэтому неудивительно, что уже в начальной школе одна из типичных математических задач формулируется так: с какой скоростью движется автомобиль (велосипедист, пешеход или пароход), если расстояние s между городами A и B он преодолевает за время t ? Частное $\frac{s}{t}$ от деления пути на время дает ответ, который вполне удовлетворяет и школьника, и учителя, ибо негласно предполагается, что движение прямолинейное и *равномерное*.

А теперь поставим ту же задачу «по-взрослому». Предположим, что путь s , проходимый телом за время t от начала прямолинейного *неравномерного* движения задается функцией $s = s(t)$. С какой скоростью движется тело в момент t ? Фактически здесь два вопроса: во-первых, необходимо определить само *понятие скорости* движения в момент t , и, во-вторых, требуется указать способ ее *вычисления*. Покажем, как математический анализ решает *одновременно* оба вопроса.

По условию, от начала движения до момента t тело прошло путь, определяемый функцией $s(t)$. Придавая аргументу t произвольное приращение Δt , мы получим новое значение аргумента: $t + \Delta t$. Тогда путь, пройденный телом от начала движения до момента $t + \Delta t$, равен $s(t + \Delta t)$, а разность $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ выражает путь, пройденный телом за отрезок времени, равный Δt . Отношение

$$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

определяет *среднюю скорость* движения тела за период времени Δt . Вид этой величины показывает, что данное отношение зависит как от момента t , так и от того, какое выбрано приращение Δt , причем при большом значении Δt определяемая таким образом средняя скорость мало что говорит о движении непосредственно в момент времени t . Напротив, при малом временном отрезке Δt полученная средняя скорость создаст более точное представление о движении в момент t . Уже этот беглый взгляд настраивает на то, что хорошо бы вовсе избавиться от влияния приращения Δt на *точную характеристику* движения в момент t . И такая возможность имеется: необходимо в указанном отношении перейти к пределу, устремив Δt к нулю.

По определению, предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

называется *мгновенной скоростью* движения в момент времени t .

Пример.

Предположим, что тело движется по закону прямолинейного равноускоренного движения $s(t) = \frac{1}{2}at^2$, где a — параметр, больший нуля. Найдем скорость $v(t)$ по вышеприведенной формуле:

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}a(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}at^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}a \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t(2t + \Delta t)}{\Delta t} = at. \end{aligned}$$

Разумеется, осведомленному читателю этот ответ известен заранее — из раздела механики школьного курса физики. Мы лишь продемонстрировали, что обновленный подход к понятию скорости и соответствующие ему вычисления приводят к не вызывающему сомнений результату.

§ 1. Основные определения и понятия

Основное определение

Абстрагируясь от физического содержания, распространим этот подход на произвольную непрерывную функцию $y = f(x)$. В ее области определения для значений аргумента x и $x + \Delta x$ существуют соответствующие значения функции $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$. Рассмотрим приращение Δy функции в точке x , равное разности этих значений функции — будем говорить, что приращение Δy соответствует приращению аргумента Δx . Далее, образуем отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Независимо от того, какой процесс описывается данной функцией, это отношение можно воспринимать как среднюю скорость ее изменения на отрезке Δx .

Дадим следующее основное

Определение 1. Предел отношения приращения Δy функции $y = f(x)$ к приращению Δx аргумента x , когда Δx стремится к нулю, называется производной данной функции в точке x и обозначается $f'(x)$, или y' :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

или, короче

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Необходимое условие существования производной выражает следующая

Теорема 1. Если функция имеет производную, то она непрерывна.

Доказательство. По свойству предела из последней формулы получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varphi,$$

где φ — величина бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$. Отсюда

$$\Delta y = y' \Delta x + \varphi \Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Полученное равенство выражает непрерывность функции.

Следствие. В точках разрыва функции производная не существует.

Обратим внимание на то, что в приведенной здесь записи приращение Δy представлено как сумма двух слагаемых: первое $y' \Delta x$ — главная часть приращения, линейная относительно Δx и эквивалентная Δy при $\Delta x \rightarrow 0$; второе слагаемое $\varphi \Delta x$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с Δx : $\varphi \Delta x = o(\Delta x)$. Важную роль играет следующее

Определение 2. Главная часть приращения функции, линейная относительно Δx , называется дифференциалом и обозначается dy :

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

Поскольку приращение Δx совпадает с dx , то эту формулу обычно записывают в следующем виде:

$$dy = f'(x) dx.$$

Отсюда получается выражение для производной в виде дроби

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

(читается: dy по dx).

$$\Delta y \approx dy,$$
$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy.$$

Геометрический смысл производной и дифференциала

Рис. 1.

Прямая l , проходящая через точки M_1, M , называется *секущей* графика функции $y = f(x)$. Из прямоугольного треугольника M_1MN находим, что угловой коэффициент k секущей l равен тангенсу угла α наклона этой прямой к оси Ox , т. е. равен отношению $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если $\Delta x \rightarrow 0$, то это отношение, по определению, стремится к значению производной $f'(x)$ в точке x_1 . Между тем, при $\Delta x \rightarrow 0$ *переменная* точка M вдоль графика стремится к точке M_1 и поэтому секущая l стремится занять

некоторое предельное положение l_1 , которому отвечает угол α_1 и, соответственно, угловой коэффициент k_1 . Итог этому процессу подводит следующее

Определение 3. *Предельное положение секущей называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_1 .*

Объединяя два аспекта — геометрический и аналитический, заключаем, что угловой коэффициент k_1 касательной l_1 равен значению производной $f'(x_1)$:

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_1).$$

По координатам точки $M_1(x_1, f(x_1))$ и угловому коэффициенту $k_1 = f'(x_1)$ уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_1 записывается в следующем виде:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Здесь x, y — координаты произвольной точки касательной, то есть текущие координаты.

Поскольку $x - x_1 = \Delta x$, то приращение $y - f(x_1)$, которое при переходе от x_1 к $x_1 + \Delta x$ получает ордината точки касательной, есть не что иное, как дифференциал dy в точке x_1 .

Замечание. Физический смысл дифференциала состоит в том, что он выражает путь, который прошло бы тело с момента времени t , если бы, начиная с этого момента, движение стало равномерным. Графиком пути этого равномерного движения как раз и является касательная к графику функции $s = s(t)$ в точке, соответствующей моменту t .

Определение 4. *Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной, называется нормалью.*

Угловой коэффициент k_2 нормали определяем из условия перпендикулярности двух прямых (глава 3): $k_1 k_2 + 1 = 0$, то есть находим

$$k_2 = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Поэтому уравнение нормали имеет следующий вид:

$$y - f(x_1) = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Подытоживая сказанное, дадим следующее фундаментальное

Определение 5. *Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой при $x = x_0$, если при этом значении x она имеет производную (или дифференциал).*

Производная и дифференциал играют фундаментальную роль в математике и ее приложениях. Вычисление производной

$f'(x)$ (или дифференциала dy) называется *дифференцированием* функции $f(x)$; этой операцией необходимо овладеть каждому, кто собирается пользоваться в своей работе математическими методами.

§ 2. Техника дифференцирования

Таблица производных

1. $y = C$	$y' = 0$
2. $y = x$	$y' = 1$
3. $y = x^n$ $y = \frac{1}{x}$ $y = \sqrt{x}$	$y' = nx^{n-1}$ $y' = -\frac{1}{x^2}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $y = e^x$ $y = a^x$	$y' = e^x$ $y' = a^x \ln a$
5. $y = \ln x$ $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}$ $y' = \frac{1}{x \ln a}$
6. $y = \sin x$	$y' = \cos x$
7. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
8. $y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
13. $y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Было бы слишком трудоемким делом при дифференцировании конкретных функций каждый раз проделывать эту операцию, пользуясь непосредственно определением производной, — соответствующий предел может оказаться весьма непростым. Далее мы установим правила, которые позволят значительно облегчить эту работу. В приведенной выше таблице производных основных элементарных функций обратим внимание на следующие обстоятельства.

1. При дифференцировании степенных функций степень функций понижается, в этом смысле производная степенной функции *проще*, чем сама функция. Например, у квадратичной функции $y = x^2$ производная $y' = 2x$ — линейная функция.
2. С точки зрения дифференцирования показательных и логарифмических функций, наиболее *простыми* оказываются функции по основанию e . Это лишний раз подчеркивает исключительность числа e в математическом анализе и его приложениях.

Каждая из вышеприведенных формул может быть получена из основного определения производной с применением формул, известных из курса элементарной алгебры, и с учетом рассмотренных ранее пределов.

Приведем *примеры*.

1. Покажем, как получить производную *степенной* функции $y = x^n$. Прежде всего выпишем легко проверяемую алгебраическую формулу

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Применяя ее, находим

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + (x + \Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + (x + \Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}] = \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Замечание. В этом доказательстве мы считали, что n — натуральное число. В более подробных курсах математическо-

го анализа устанавливается, что полученная формула сохраняет свой вид и в случае, когда показатель — любое отличное от нуля рациональное число.

2. Для показательной функции $y = e^x$ имеем

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x.$$

(Последний предел равен 1, он был вычислен в главе 6).

3. Найдем производную функции $y = \sin x$.

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\cos \frac{\Delta x}{2}} = \cos x. \end{aligned}$$

Здесь использован первый замечательный предел (глава 6).

Представленные в таблице формулы позволяют продифференцировать *основные* элементарные функции. Для полноценного применения аппарата дифференциального исчисления необходимо уметь дифференцировать *произвольные* элементарные функции, получаемые из основных функций как с помощью алгебраических операций, так и посредством суперпозиций элементарных функций, приводящих к сложным функциям (*функциям от функций*).

Правила дифференцирования

Перечислим правила дифференцирования функций, получаемых в результате алгебраических операций над функциями, производные которых известны.

1. *Постоянный множитель можно вынести за знак дифференцирования:*

$$[cf(x)]' = cf'(x).$$

2. *Производная суммы (разности) функций $u(x)$ и $v(x)$ равна сумме (разности) производных функций, образующих сумму (разность):*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

3. *Производная произведения двух функций находится по формуле*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

4. Производная частного двух функций вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Покажем, например, как выводится третья формула.

$$\begin{aligned}(uv)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \\&\quad + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = u'v + uv'.\end{aligned}$$

Последнее произведение пределов равно нулю, так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$ в силу непрерывности функции $v(x)$.

Приведем примеры применения правил дифференцирования.

$$1. \left(\frac{2x^4 + x\sqrt{x} - 3}{x}\right)' = \left(2x^3 + \sqrt{x} - 3\frac{1}{x}\right)' = 6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}2. (e^x \cos x)' &= (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x = \\&= e^x (\cos x - \sin x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1}\right)' &= \frac{(\operatorname{arctg} x)'(x^2 + 1) - \operatorname{arctg} x (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \\&= \frac{\frac{1}{x^2 + 1}(x^2 + 1) - \operatorname{arctg} x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - 2x \cdot \operatorname{arctg} x}{(x^2 + 1)^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. [x(\ln x - 1)]' &= (x)'(\ln x - 1) + x(\ln x - 1)' = \\&= \ln x - 1 + x \frac{1}{x} = \ln x.\end{aligned}$$

Дифференцирование сложных функций

Пусть переменная величина y есть суперпозиция (результат последовательного применения) двух функций:

$$\begin{cases} y = f(t), \\ t = \varphi(x), \end{cases} \Rightarrow y = f[\varphi(x)] = F(x).$$

Найдем производную $F'(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = f'(t) \varphi'(x). \end{aligned}$$

Приведем *примеры* дифференцирования сложных функций.

1. $y = (x^2 - 2x)^3$.

а) Подробно. $\begin{cases} y = t^3, \\ t = x^2 - 2x. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \left[(x^2 - 2x)^3 \right]' &= (t^3)'(x^2 - 2x)' = 3t^2(2x - 2) = \\ &= 3(x^2 - 2x)^2(2x - 2) = 6x^2(x - 2)^2(x - 1). \end{aligned}$$

б) Будем предпочитать краткую запись

$$\begin{aligned} \left[(x^2 - 2x)^3 \right]' &= 3(x^2 - 2x)^2(x^2 - 2x)' = \\ &= 3(x^2 - 2x)^2(2x - 2) = 6x^2(x - 2)^2(x - 1). \end{aligned}$$

2. $y = \sin^2 x$, $(\sin^2 x)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$.

3. $y = \sqrt{1 - x^2}$,

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (1-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для нахождения производной степенно-показательной функции $y = x^x$ предварительно ее логарифмируют, а затем применяют правило дифференцирования сложной функции.

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x.$$

$$(\ln y)' = (x \ln x)' \Rightarrow \frac{1}{y} y' = \ln x + 1.$$

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Подведем предварительные итоги. Овладев техникой дифференцирования, можно без особых усилий находить производные самых разнообразных функций. Напротив, требуются усилия, чтобы придумать функцию, которую мы не смогли бы продифференцировать. Тем не менее, такие функции встречаются. Приведем пример *непрерывной* функции, для которой при одном из значений аргумента производная не существует.

Пример.

Рассмотрим функцию *модуль* x :

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \in (0, +\infty); \\ -x, & \text{если } x \in (-\infty, 0); \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

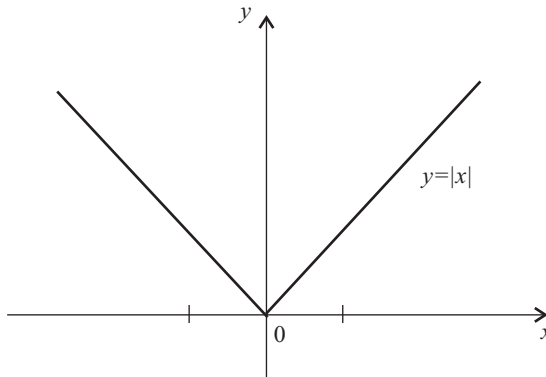


Рис. 2.

В каждом из интервалов производная существует:

$$y' = 1 \text{ при } x > 0, \quad y' = -1 \text{ при } x < 0.$$

При $x = 0$ имеем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, & \text{при } \Delta x > 0; \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, & \text{при } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Поскольку результат зависит от знака Δx , то при $x = 0$ производная данной функции не существует. Геометрически это иллюстрируется тем, что в (угловой) точке $x = 0$, $y = 0$ график $y = |x|$ не имеет касательной.

Производная и дифференциал второго порядка

Поскольку производная $f'(x)$ также является функцией, то можно поставить задачу ее дифференцирования. Дадим

Определение 6. *Функция, которая получается в результате дифференцирования производной данной функции, называется производной второго порядка данной функции (или просто второй производной); она обозначается $f''(x)$ или y'' .*

Другими словами, производная второго порядка получается двукратным (или повторным) дифференцированием функции.

Примеры.

Найдем производные второго порядка следующих функций:

1. $y = ax + b$, $y' = a$, $y'' = 0$.

2. $y = ax^2 + bx + c$, $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$.

3. $y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$.

4. $y = e^x$, $y' = e^x$, $y'' = e^x$.

5. $y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$.

6. $y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$.

Физический смысл производной второго порядка состоит в том, что она определяет скорость изменения скорости движения, то есть ускорение. Так, при равноускоренном движении, задаваемом формулой $s = \frac{1}{2}at^2$, двукратным дифференцированием этой функции легко устанавливаем, что ускорение постоянно и равно a (отсюда и само название такого движения). Аналогично определяется дифференциал второго порядка — это дифференциал от дифференциала первого порядка. Полагая, что в формуле дифференциала $dy = f'(x)\Delta x$ приращение Δx постоянно, находим формулу для дифференциала второго порядка d^2y :

$$d^2y = f''(x)(\Delta x)^2.$$

§ 3. Основные теоремы дифференциального исчисления

Овладев техникой дифференцирования, рассмотрим более детально связь между функциями и их производными. Говорят, что *функция дифференцируема на интервале, если она имеет производную в каждой точке этого интервала*. Связь между функцией и ее производной выражает

Теорема Лагранжа. *Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то на этом интервале есть по крайней мере одна точка $x = c$ ($a < c < b$), в которой производная удовлетворяет условию:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Опуская доказательство (оно имеется в более подробных курсах высшей математики), остановимся на *геометрическом аспекте* этой теоремы, который отражен на рис. 3.

Отношение в правой части равенства выражает тангенс угла α наклона хорды AB к оси Ox , т.е. равно угловому ко-

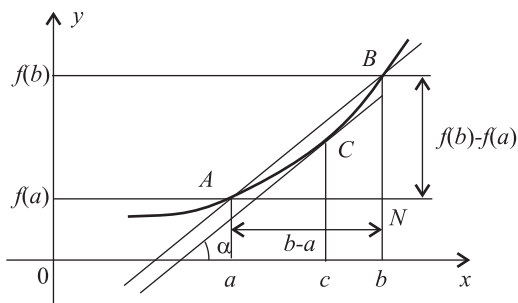


Рис. 3.

эффициенту этой хорды, в то время как производная в левой части равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке C . Так как равенство угловых коэффициентов двух прямых влечет за собой их параллельность, то геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в утверждении, что существует такая точка графика, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей начальную и конечную точки графика.

Следующие записи теоремы Лагранжа называются *формулами конечных приращений*.

На отрезке $[a, b]$: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

На отрезке $[x, x + \Delta x]$: $f(x + \Delta x) - f(x) \equiv \Delta y = f'(c)\Delta x$.

Сравним последнее *точное* равенство с рассматривавшимся ранее *приближенным* равенством

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x.$$

Здесь производная вычисляется в точке x , но равенство приближенное; в формуле конечных приращений равенство точное, но производная вычисляется в некоторой, вообще говоря, неизвестной *средней* точке.

Замечание. Можно показать, что для квадратного трехчлена *средняя* точка $x = c$ расположена в точности посередине отрезка $[a, b]$.

Частным случаем теоремы Лагранжа является **теорема Ролля**, в которой на функцию налагается дополнительное условие — ее значения в концах отрезка предполагаются равными между собой: $f(b) = f(a)$. Теорема Ролля утверждает существование по крайней мере одной такой *средней* точки $x = c$, в которой производная равна нулю: $f'(c) = 0$. На геометрическом языке это

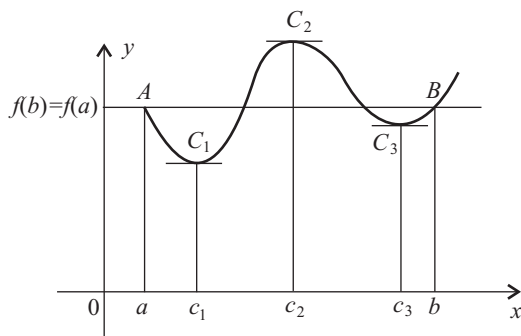


Рис. 4.

означает, что имеется хотя бы одна точка графика, в которой касательная параллельна оси абсцисс (на рис. 4 таких точек три).

Формула Тейлора

Чтобы получить приращение функции с большей точностью, к исследованию привлекают *производную второго порядка*. Имеет место следующая *формула Тейлора*:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)\Delta x^2 + \alpha,$$

где α — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx^2 : $\alpha = o(\Delta x^2)$. Рассматривая эту формулу в начале координат (в этом случае $\Delta x = x$), получаем *формулу Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \alpha.$$

Таким образом, данная функция приближенно равна квадратному трехчлену.

Примеры.

1. $f(x) = e^x$; $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \alpha$; $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
2. $f(x) = \cos x$; $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \alpha$; $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

Правило Лопиталя

Еще одно важное приложение производных состоит в том, что они применяются для раскрытия неопределенностей типов $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Такую возможность предоставляет *правило Лопи-*

таля. Суть его состоит в том, что предел отношения функций заменяется пределом отношения их производных:

$$\lim \frac{u(x)}{v(x)} = \lim \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Примеры.

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^3 - 27)'}{(x^2 - 9)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2}{2x} = \frac{9}{2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2^x)'}{(x - 2)'} = \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 2^x \ln 2}{1} = 4 - 4 \ln 2 = 4(1 - \ln 2).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

В последнем примере *правило Лопиталья* применено дважды.

§ 4. Исследование функций с помощью производных

Перечислим правила, позволяющие, используя связь между свойствами функций и свойствами их производных, применять производные для исследования функций и построения графиков.

Интервалы монотонности

Определение 7. Значения аргумента, при которых производная равна нулю, называются *стационарными точками*. Стационарные точки и точки непрерывности функции, в которых производная не существует, называются *критическими точками*.

Критические точки и точки разрыва разбивают область определения функции на *интервалы положительности* или *отрицательности производной*.

Правило 1. На интервале положительности производной функция *возрастает*, а на интервале отрицательности производной — *убывает*.

Правило 2. В критической точке, отделяющей интервал возрастания от интервала убывания, функция имеет *максимум*; если же интервалы монотонности расположены в обратном порядке, то в критической точке — *минимум*.

Для доказательства первого правила воспользуемся формулой конечных приращений

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c)\Delta x.$$

Полагая, что точки x и $x + \Delta x$ принадлежат интервалу, во всех точках которого производная положительна, замечаем, что знаки приращений аргумента и функции совпадают — а это и означает, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. на данном интервале функция возрастает. Аналогично устанавливается, что на интервале отрицательности производной функция убывает.

Второе правило вполне очевидно.

Геометрическая иллюстрация приводится на рис. 5.

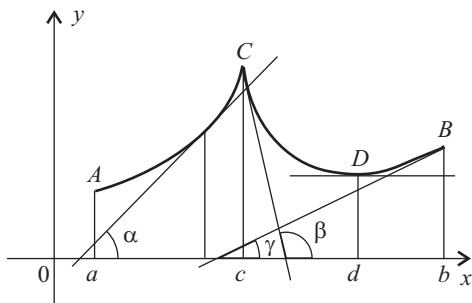


Рис. 5.

Здесь (a, c) , (c, d) , (d, b) соответственно, интервалы возрастания, убывания, возрастания. Знак производной — «плюс» или «минус» — определяет острый или тупой угол наклона касательных к оси Ox на каждом из интервалов монотонности. В критических точках c и d функция достигает, соответственно максимума и минимума. Первая из этих точек *угловая* — в ней производная не существует, поэтому в этой точке касательной нет. Вторая из этих точек — *стационарная*, в ней производная равна нулю, поэтому имеющая в этой точке нулевой угловой коэффициент касательная — горизонтальная.

Замечание. Наибольшее M и наименьшее m значения функции, непрерывной на отрезке (которые она принимает согласно теореме Вейерштрасса, глава 6) находят, определив предварительно все максимумы и минимумы функции на отрезке и выбрав затем наибольшее и наименьшее из этих чисел и двух значений функции на концах отрезка.

Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба

Определение 8. Кривая называется выпуклой на интервале, если в каждой точке этого интервала существует (не вертикальная) касательная и кривая расположена под касательной; если кривая располагается над касательной, то она называется вогнутой. Граничная точка между интервалами выпуклости и вогнутости, в которой кривая имеет касательную и располагается по разные стороны от касательной, называется точкой перегиба.

Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции исследуются с помощью производной второго порядка.

Правило 3. На интервале отрицательности производной второго порядка график функции выпуклый, а на интервале положительности — вогнутый.

Правило 4. Для того чтобы граничная точка была точкой перегиба, необходимо, чтобы в этой точке производная второго порядка равнялась нулю.

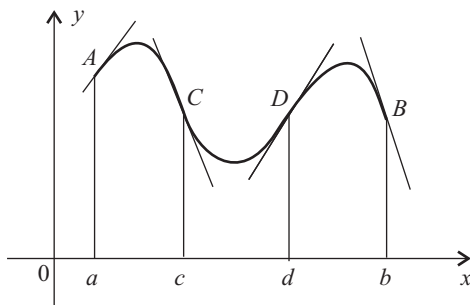


Рис. 6.

Доказательства этих правил имеются в более подробных руководствах по высшей математике. Геометрическая иллюстрация приведена на рис. 6.

Здесь (a, c) , (c, d) , (d, b) — соответственно интервалы выпуклости, вогнутости, выпуклости; C и D — точки перегиба. Рекомендуем читателю вернуться к рис. 4 и к рис. 5 и выяснить, имеются ли на представленных графиках интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Асимптоты

Установив характерные особенности поведения функции и ее графика в конечной части плоскости, не менее важно знать, как ведет себя функция (и ее график) на бесконечности — при неограниченном возрастании аргумента (разумеется, если

область определения функции — *слева* или *справа* — не ограничена). Напомним, что если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a,$$

то график функции неограниченно приближается к прямой $y = a$, которая называется *горизонтальной асимптотой*. Если же этот предел бесконечен, то возникает вопрос о *наклонной асимптоте*. Ее уравнение ищут в виде

$$y = kx + b.$$

Угловой коэффициент k и свободный член b определяют последовательно по формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ или } k = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x);$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

Если хотя бы один из этих пределов не существует, то наклонной асимптоты нет. Наклонная асимптота доставляет важнейшую информацию о характере функции (и ее графика) *на бесконечности*, так как позволяет обнаружить такие свойства функции, которые часто трудно уловить, непосредственно придавая аргументу сколь угодно большие (по модулю) числовые значения. Найдя наклонную асимптоту, мы вправе при больших значениях аргумента приближенно *заменить* данную функцию наиболее простой из всех функций — а именно, *линейной*, геометрическим образом которой и является наклонная асимптота — *прямая линия*, к которой график подходит сколь угодно близко при неограниченном возрастании x .

Напомним, что прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при условии, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

§ 5. Пример полного исследования функции

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Исследование без применения производной

- 1) Область определения $D: (-\infty, +\infty)$. Функция непрерывна.
- 2) Точка пересечения с осями координат: $O(0, 0)$. График проходит через начало координат. Других точек пересечения с осью Ox нет.

3) Интервалы знакопостоянства функции:

$x \in (-\infty, 0)$	$y < 0$	график расположен под осью Ox
$x \in (0, +\infty)$	$y > 0$	график расположен над осью Ox

Результаты изобразим схематично, отметив засечками те части плоскости, в которых графика нет (рис. 7).

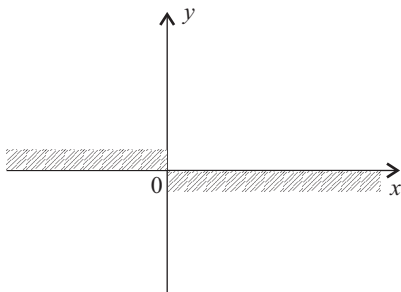


Рис. 7.

4) Функция нечетная: $f(-x) = -f(x)$. График симметричен относительно начала координат.

5) Поведение функции на границе области определения, т. е. при $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0.$$

Ось абсцисс является горизонтальной асимптотой графика. Вертикальных и наклонных асимптот нет.

Исследование с помощью производной первого порядка

Дифференцируем функцию $y = f(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

6) Находим нули производной: $f'(x) = 0$.

$$2(1 - x^2) = 0; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

7) Интервалы знакопостоянства производной (интервалы монотонности функции).

Изобразим эти результаты схематично (рис. 8).

8) Точки экстремума.

При $x = -1$ функция имеет минимум: $y_{\min} = -1$.

При $x = 1$ функция имеет максимум: $y_{\max} = 1$.

$x \in (-\infty, -1)$	$f'(x) < 0$	$f(x)$ убывает
$x \in (-1, 1)$	$f'(x) > 0$	$f(x)$ возрастает
$x \in (1, +\infty)$	$f'(x) < 0$	$f(x)$ убывает

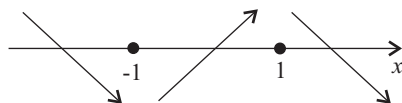


Рис. 8.

В точках экстремума касательная к графику горизонтальна.

9) Область значений функции: $f(x) \in [-1, 1]$.

Исследование с помощью производной второго порядка

Дифференцируем производную $f'(x)$:

$$f''(x) = \left(\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \right)' = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

10) Нули производной второго порядка: $f''(x) = 0$.

$$4x(x^2-3) = 0; \quad x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

11) Интервалы знакопостоянства производной второго порядка (интервалы выпуклости или вогнутости графика функции).

$x \in (-\infty, -\sqrt{3})$	$f''(x) < 0$	график функции выпуклый
$x \in (-\sqrt{3}, 0)$	$f''(x) > 0$	график функции вогнутый
$x \in (0, \sqrt{3})$	$f''(x) < 0$	график функции выпуклый
$x \in (\sqrt{3}, +\infty)$	$f''(x) > 0$	график функции вогнутый

Результаты исследования изобразим схематично (рис. 9).

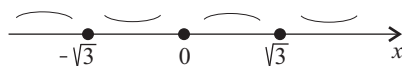


Рис. 9.

12) Точки перегиба при $f''(x) = 0$:

$$1. \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad 2. (0, 0) \quad 3. \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

В точках перегиба определяем угловые коэффициенты касательных:

$$k_1 = f'(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{4}, \quad k_2 = f'(0) = 2, \quad k_3 = f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{4}$$

и проводим касательные.

Итогом проведенного аналитического исследования является построенный по найденным пяти характерным точкам (с учетом асимптоты) график функции, изображенный на рис. 10 (с касательными в каждой из этих точек).

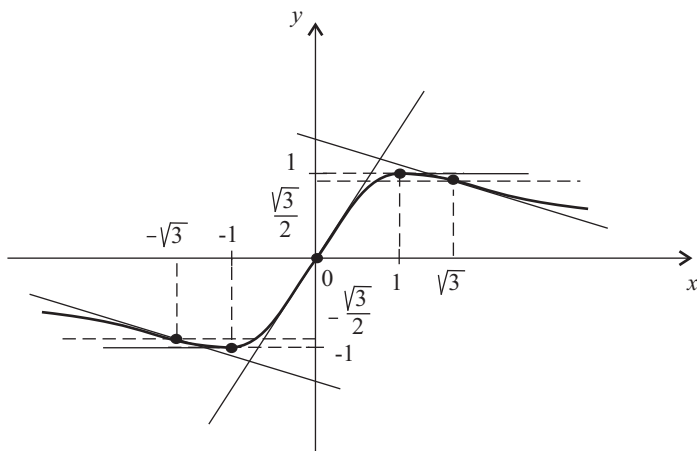


Рис. 10.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение производной функции $y = f(x)$ при данном значении аргумента.
2. Приведите разные формы записи производной в данной точке.
3. Каков физический смысл производной?
4. Какая функция называется дифференцируемой в данной точке?
5. Что означает выражение «дифференцирование функции»?
6. Восстановите по памяти формулы дифференцирования основных элементарных функций.
7. Выведите одну из этих формул.
8. Сформулируйте правила дифференцирования результатов арифметических действий над функциями.
9. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.
10. Дайте определение касательной линии в точке.
11. Каков геометрический смысл производной?
12. Напишите уравнение касательной к графику функции в данной точке.

13. Если график функции имеет касательную, то обязательно ли функция дифференцируема в соответствующей точке?
14. Что называется нормалью к линии в данной точке?
15. Напишите уравнение нормали к графику функции в данной точке.
16. Что называется дифференциалом функции при данном значении аргумента?
17. Каков геометрический смысл дифференциала?
18. Как применяется дифференциал в приближенных вычислениях? Приведите пример.
19. В каком случае функция называется дифференцируемой в данной точке? Приведите пример недифференцируемой функции.
20. Как соотносятся между собой понятия непрерывности и дифференцируемости функции в данной точке? Привести примеры и дать геометрическое истолкование.
21. Дайте определение производной второго порядка.
22. Каков физический смысл производной второго порядка?
23. Что называется интервалом монотонности функции?
24. Как применяется производная для нахождения интервалов монотонности функций?
25. Что называется экстремумом функции?
26. Как применяется производная для нахождения точек экстремума функции?
27. Как находятся наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке?
28. Что означают понятия «выпуклость» и «вогнутость» кривой?
29. Как находятся интервалы выпуклости и вогнутости графика функции с помощью производной второго порядка?
30. Какая точка называется точкой перегиба?
31. Как находятся точки перегиба графика функции с помощью производной второго порядка?
32. По фрагменту графика функции охарактеризуйте возможные значения ее производных первого и второго порядка в окрестности данной точки.
33. Что такое асимптота кривой?
34. Как находятся вертикальные и горизонтальные асимптоты графика функции?
35. Как находятся наклонные асимптоты графика функции?
36. Перечислите основные этапы полного исследования функции.

Задания для аудиторной и домашней работы

А. Для следующих функций при $x = 2$ для произвольного приращения Δx найти соответствующее приращение функции Δy и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Затем найти производную y' по основному определению.

- | | |
|-----------------------------|---------------------|
| 1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$; | 3) $f(x) = \ln x$; |
| 2) $f(x) = x^3$; | 4) $f(x) = e^x$. |

В. Вычислить y' , используя таблицу производных и правила дифференцирования.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $y = 3x^2 - 7x + 4$; | 11) $y = x^2 \sin x$; |
| 2) $y = x^3$; | 12) $y = \frac{\cos x}{x}$; |
| 3) $y = e^x - \ln x$; | 13) $y = \frac{\sin x}{\ln x}$; |
| 4) $y = \sqrt{x} - 2x^2$; | 14) $y = 2^x \operatorname{tg} x$; |
| 5) $y = \frac{4x^2 - 3x + 1}{x}$; | 15) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{3^x}$; |
| 6) $y = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x}$; | 16) $y = x \cdot \arcsin x$; |
| 7) $y = x^3 - 3^x$; | 17) $y = \frac{\arcsin x}{x}$; |
| 8) $y = x^2 2^x$; | 18) $y = 3 \arctg x$; |
| 9) $y = x^3 \ln x$; | 19) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$; |
| 10) $y = \frac{\lg x}{e^x}$; | 20) $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$. |

С. Вычислить производные следующих сложных функций:

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $y = (2x - 1)^2$; | 10) $y = \sin x^2$; |
| 2) $y = (3 - 2x)^5$; | 11) $y = \sin 4x$; |
| 3) $y = (2x^2 + \sqrt{x})^2$; | 12) $y = \operatorname{tg} 3x$; |
| 4) $y = \sqrt{1 + x^2}$; | 13) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; |
| 5) $y = \sqrt{1 - x^2}$; | 14) $y = \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$; |
| 6) $y = 2^{2x-1}$; | 15) $y = \arcsin 2x$; |
| 7) $y = e^{1-x^2}$; | 16) $y = \operatorname{arctg} e^x$; |
| 8) $y = \ln(x^2 + e^x)$; | 17) $y = \arccos (\ln x)$; |
| 9) $y = \sin^2 x$; | 18) $y = \ln(\arccos x)$. |

Д. Вычислить производные данных функций двумя способами: сначала непосредственным дифференцированием, а затем, выполнив предварительно полезные тождественные преобразования. Сравнить результаты.

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $y = \sin 2x$; | 4) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$; |
| 2) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$; | 5) $y = \ln(x^2 e^x)$; |
| 3) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$; | 6) $y = e^{x^2 + \ln x}$. |

Е. При $x = 2$ найти дифференциал dy следующих функций:

- | | |
|--------------------------|------------------|
| 1) $y = 3x^2 - 7x + 4$; | 3) $y = \ln x$; |
| 2) $y = x^3$; | 4) $y = e^x$. |

Ф. Написать уравнения касательной и нормали к графикам следующих функций при $x = 2$:

- | | |
|--------------------------|------------------|
| 1) $y = 3x^2 - 7x + 4$; | 3) $y = \ln x$; |
| 2) $y = x^3$; | 4) $y = e^x$. |

Г. Найти производные второго порядка y'' для следующих функций:

- | | |
|---------------------------|--|
| 1) $y = e^x - \ln x$; | 5) $y = e^{1-x^2}$; |
| 2) $y = (2x - 1)^2$; | 6) $y = \sin 4x$; |
| 3) $y = (3 - 2x)^5$; | 7) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; |
| 4) $y = \sqrt{1 + x^2}$; | 8) $y = \operatorname{arctg} x$. |

Н. Применяя правило Лопиталя, вычислить следующие пределы:

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; | 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$; |
| 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$; | 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$; |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$; | 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3}$; |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$; | 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$; | 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x - 1}}{x^2 - 1}$; |
| 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}$; | 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$; |
| 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$; | 14) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$. |

I. Для каждой из следующих функций найти нули и интервалы знакопостоянства, интервалы монотонности, экстремумы, интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графиков:

- | | |
|-----------------------|---|
| 1) $y = x^2 - x - 2;$ | 4) $y = \ln x^2;$ |
| 2) $y = x^3 - x - 2;$ | 5) $y = \sin \frac{x}{2};$ |
| 3) $y = 2 \ln x;$ | 6) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$ |

J. Провести асимптоты к графикам следующих функций:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) $y = \frac{1}{x-1};$ | 4) $y = x + e^{-x};$ |
| 2) $y = \frac{x-1}{x};$ | 5) $y = \frac{\ln x}{x};$ |
| 3) $y = \frac{x^2-1}{x};$ | 6) $y = x \ln x.$ |

K. Провести полное исследование и построить графики следующих функций:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $f(x) = x^3 - x - 2;$ | 4) $f(x) = x + e^{-x};$ |
| 2) $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x;$ | 5) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2};$ |
| 3) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 7;$ | 6) $f(x) = x^3 - 3x.$ |

L. Применив дифференциал, вычислить приближенные значения приращений следующих функций:

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| 1) $y = x^3 - x + 2$ | при $x = 3$ и $\Delta x = 0,1;$ |
| 2) $y = x^3 - \frac{2x-1}{3}$ | при $x = 2$ и $\Delta x = 0,02.$ |

M. Применив дифференциал, выполнить следующие вычисления:

- 1) $\sqrt{101};$ 2) $\sqrt[3]{65};$ 3) $1,02^{10};$ 4) $\sqrt[3]{1,02}.$

N. Проверить, что нижеуказанные функции удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) $y' - 2y = 0,$ | $y = e^{2x};$ |
| 2) $y' + 2xy = 0,$ | $y = e^{-x^2};$ |
| 3) $y'' + y = 0,$ | $y = \sin x, y = \cos x;$ |
| 4) $y'' - 3y' + 2y = 0,$ | $y = e^x - e^{2x}.$ |

О. Для нижеследующих функций найти *среднюю* точку (см. теоремы Лагранжа и Ролля) на указанных отрезках:

- 1) $y = x^2 - 6x + 8$ на $[0, 6]$;
- 3) $y = x^3$ на $[-1, 1]$;
- 2) $y = x^2 - 6x + 8$ на $[2, 6]$;
- 4) $y = Ax^2 + Bx + C$ на $[a, b]$.

Р. Написать формулу Маклорена для функции $y = \ln(1 + x)$.

Задания для индивидуальной домашней работы № 7

В каждом задании N — номер вашего варианта.

А. Продифференцировать следующие функции:

- 1) $y = (Nx - 2)^3$;
- 5) $y = \arctg(\sqrt{N}x)$;
- 2) $y = x^{2N}Nx$;
- 6) $y = \sin(2Nx - N^2)$;
- 3) $y = \frac{(Nx - 1)^2}{Nx}$;
- 7) $y = e^{Nx + \ln x}$.
- 4) $y = \sqrt{Nx} + \frac{N}{x}$;

В. Написать уравнение касательной к кривой $y = (x - N)^3$ при $x = 2N$.

С. Найти производные второго порядка следующих функций:

- 1) $y = e^{Nx}$;
- 2) $y = \sin Nx$;
- 3) $y = \ln\left(\frac{N}{x}\right)$.

Д. Вычислить пределы, применяя правило Лопиталя:

- 1) $\lim_{x \rightarrow -N} \frac{(N + x)^2}{N^2 - x^2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{x-1}{N}}{x^2 - 1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2N + x^2}{Nx - x^2}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{Nx} - 1}{x}$.

Е. Исследовать функцию и построить ее график.

$$f(x) = \frac{2(x - N)}{x^2 - 2Nx + N^2 + 1}.$$

Глава 8

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Только допустив бесконечно малую единицу для наблюдения — дифференциал истории — и достигнув искусства интегрировать (брать суммы этих бесконечно малых), мы можем надеяться на постигновение законов истории (Т. 3, ч. 3)

...Придя к бесконечно малому, математика, точнейшая из наук, оставляет процесс дробления и приступает к новому процессу суммирования бесконечно малых. Математика отыскивает закон, т. е. свойства, общие всем бесконечно малым элементам (Эпilog, ч. 2)

Л. Толстой, Война и мир

В жизни мы неоднократно встречаемся с различными проявлениями одного из основных законов философии, утверждающего, что движущей силой развития является *единство и борьба противоположностей*. Верх и низ, впереди и позади (зависит от того, как посмотреть...), направо и налево (Пойдешь направо — придешь налево!) — таковы проявления этого принципа *в положениях*. Построение и разрушение («Весь мир насилья мы разрушим до основания, а затем мы наш, мы новый мир построим!»), победа и поражение (шведы, хоть и не без иронии, поговаривают, что их благоденствие началось с *Полтавы*), эмиграция и иммиграция, отдаление и приближение — это единство и борьба противоположностей *в действиях*. Субсидирование и изъятие средств, приумножение капитала и банкротство — такого рода явления наблюдаются *в экономике*. В математике у этого закона своя специфика. О взаимно обратных операциях подробно говорилось уже в начале книги, таковы сложение и вычитание,

умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня или логарифмирование.

Важнейшей операцией математического анализа является *дифференцирование*, которое по заданной функции определяет новую функцию — ее производную. В свете сказанного вполне естественно поставить вопрос об *обратной операции для дифференцирования*, которая по заданной производной восстанавливала бы исходную функцию. *Интегрирование* — так называется эта операция — наряду с дифференцированием является важнейшей составляющей высшей математики, в той или иной форме оно встречается во всех областях знаний, использующих математические средства для решения своих конкретных задач; *интегральному исчислению* функций посвящается последний раздел этой книги. Глубинный смысл этого понятия раскрывается в латинской первооснове слова *интегрирование* — что значит *объединение, собирание воедино*, в противоположность *дифференцированию*, которое означает — *разделение, разобщение*. Слегка перефразируя Библию, скажем так: всему свое время — время разбрасывать камни (дифференцировать!) и время собирать камни (интегрировать). Именно такое время будем отсчитывать с этой минуты.

§ 1. Неопределенный интеграл: основные определения и понятия

Техника интегрирования

Предположим, что на некотором промежутке (конечном или бесконечном, замкнутом или открытом) задана непрерывная функция $y = f(x)$.

Дадим следующие основные определения.

Определение 1. *Функция $y = F(x)$ называется первообразной функции $y = f(x)$, если в каждой точке промежутка функция $f(x)$ является производной функции $F(x)$:*

$$F'(x) = f(x).$$

Определение 2. *Однопараметрическое семейство первообразных функций $F(x) + C$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Здесь символ $\int$ — знак интеграла, $f(x)$ — подинтегральная функция, произведение $f(x)dx$ — подинтегральное выражение, C — произвольная постоянная (параметр).

Замечание. В определении 2 учтено, что, поскольку $C' = 0$, то очевидно, что вместе с функцией $F(x)$ функция $F(x) + C$ при любом значении постоянной C также является первообразной функции $f(x)$.

Отыскание всех первообразных данной функции называется ее *интегрированием*. Такова первая задача интегрального исчисления, она является обратной по отношению к задаче отыскания производной данной функции — основной задаче дифференциального исчисления. *Дифференциальное и интегральное исчисления* — это две ветви *математического анализа* — важнейшей, основополагающей части высшей математики.

Запишем формулы, выражающие данные выше определения и взаимную обратность дифференцирования и интегрирования.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C, \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Приведем примеры.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int 4x^3 dx = x^4 + C \Leftrightarrow (x^4 + C)' = 4x^3; \\ 2. \quad & \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C \Leftrightarrow \left(\frac{2^x}{\ln 2} + C\right)' = 2^x; \\ 3. \quad & \int \cos(1 - 3x) dx = -\frac{1}{3} \sin(1 - 3x) + C \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3} \sin(1 - 3x) + C\right)' = \\ & = -\frac{1}{3} \cos(1 - 3x)(1 - 3x)' = -\frac{1}{3} \cos(1 - 3x)(-3) = \cos(1 - 3x). \end{aligned}$$

Табличные интегралы

По таблице производных (глава 7) составим *таблицу интегралов* некоторых элементарных функций. Каждая из этих новых формул легко проверяется дифференцированием.

1.	$\int 1 \cdot dx = x + C, \quad \int 0 \cdot dx = C$
2.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
3.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
5.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
6.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
7.	$\int e^x dx = e^x + C; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1)$
8.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
9.	$\int \cos x dx = \sin x + C$
10.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
11.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

Замечание к п. 4. При $x < 0$ имеем $\ln|x| = \ln(-x)$. Дифференцируя эту функцию как сложную, получаем:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Правила интегрирования

Многие интегралы сводятся к табличным интегралам после удачно выбранных тождественных преобразований подинтегральных функций и последующего применения нижеприводимых простых правил интегрирования.

Правило 1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx.$$

Правило 2. Неопределенный интеграл от суммы (или разности) двух функций равен сумме (или разности) интегралов от

каждой функции в отдельности:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

Оба эти правила легко проверяются дифференцированием.

Примеры.

1. $\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C;$
2. $\int \left(3x^2 + \frac{4}{1+x^2} - 2\sin x \right) dx = 3 \int x^2 dx + 4 \int \frac{dx}{1+x^2} - 2 \int \sin x dx = x^3 + 4\operatorname{arctg} x + 2\cos x + C;$
3. $\int \frac{xe^x - 4x + 8}{x} dx = \int \left(e^x - 4 + \frac{8}{x} \right) dx = \int e^x dx - 4 \int dx + 8 \int \frac{dx}{x} = e^x - 4x + 8 \ln |x| + C;$
4. $\int (2x - 3)^2 dx = \int (4x^2 - 12x + 9) dx = 4 \int x^2 dx - 12 \int x dx + 9 \int dx = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x + C;$
5. $\int (2^{x+1} - 3^{x-2}) dx = 2 \int 2^x dx - \frac{1}{9} \int 3^x dx = 2 \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{9} \frac{3^x}{\ln 3} + C = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} - \frac{3^{x-2}}{\ln 3} + C;$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$

Методы интегрирования

Рассмотрим два *сильнодействующих* метода интегрирования, которые еще более расширят рамки наших возможностей.

1. *Метод интегрирования по частям* является интегральным аналогом правила дифференцирования произведения двух функций. Для применения этого метода необходимо подинтегральное выражение $f(x)dx$ представить в виде произведения некоторой функции $u = u(x)$ на дифференциал dv другой функции вначале неизвестной:

$$f(x)dx = u(x)dv(x).$$

Тогда имеет место следующая *формула интегрирования по частям*:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

(которая проверяется дифференцированием левой и правой частей).

Для того чтобы практически применить эту формулу, нужно по функции u найти ее дифференциал du , а по дифференциалу dv найти (интегрированием) функцию v . Не давая сразу окончательного ответа, этот метод позволяет свести данный интеграл (в левой части равенства) к более простому интегралу (в правой части).

Примеры.

1. Покажем, как интегрированием по частям находится интеграл

$$\int x \cos x dx.$$

Полагаем:

$$u = x, \quad dv = \cos x dx,$$

так что

$$du = dx, \quad v = \sin x.$$

Далее, по указанной формуле находим

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Таким образом, применяемый метод позволяет свести интегрирование непростой функции $x \cos x$ к табличному интегралу от функции $\sin x$. По пути нам пришлось по выражению $dv = \cos x dx$ определить функцию $v = \sin x$ (так что фактически при интегрировании по частям один сложный интеграл заменяется на два простых). Заметим, что другие представления данного подинтегрального выражения в виде произведения (например, $u = \cos x$, $dv = x dx$) были бы неудачными, поскольку не привели бы к более простым интегралам.

В следующих примерах, преобразовывая данные интегралы, мы каждый раз указываем, как выбраны u и dv и чему при этом равны du и v .

$$2. \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x - 1) e^x + C;$$

$$u = x, \quad dv = e^x dx \Rightarrow du = dx, \quad v = e^x.$$

$$3. \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C;$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad v = x.$$

$$4. \int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C =$$

$$= \frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1) + C; \quad u = \ln x, \quad dv = x^2 dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x},$$

$$v = \frac{x^3}{3}.$$

$$5. \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx; \quad u = \ln x, \quad dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad v = \ln x.$$

Разрешая полученное соотношение как уравнение, в котором в роли неизвестного выступает искомый интеграл, находим:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

II. Метод замены переменных является интегральным аналогом правила дифференцирования сложной функции. Он состоит в том, что *подстановкой* $x = \varphi(t)$ или $t = \psi(x)$ данный интеграл сводят к более простому. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

1. Интеграл

$$\int (2x - 3)^2 dx$$

подстановкой

$$t = 2x - 3 \Rightarrow dt = 2dx, \quad dx = \frac{1}{2} dt$$

сводится к табличному:

$$\int (2x - 3)^2 dx = \frac{1}{2} \int t^2 dt = \frac{t^3}{6} + C = \frac{(2x - 3)^3}{6} + C.$$

Замечание. Сравнивая этот метод с тем, который мы применили для нахождения того же самого интеграла ранее (пример 4 на стр. 169), убеждаемся в преимуществе метода замены переменных, ибо он позволяет с одинаковой легкостью

найти интеграл любой функции вида $(2x - 3)^n$ независимо от значения показателя n . Попутно заметим, что полезно сопоставлять ответы, получаемые в одной и той же задаче при решении ее разными способами!

$$2. \int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C;$$

$$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}.$$

Замечание. Этот подход также интересно сопоставить с тем, который был применен к данному интегралу выше (пример 5). Такого рода анализ разных подходов к одной и той же задаче всегда углубляет наше понимание проблемы и ее решения и способствует более глубокому усвоению математики.

$$3. \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\sin x| + C;$$

$$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx.$$

Обратим внимание на то, что простота вычисления этого интеграла методом замены переменных обусловлена тем, что в результате сделанной подстановки *в числителе* оказалась *производная знаменателя*. Интегралы такого рода всегда приводят к натуральному логарифму модуля функции, стоящей в знаменателе. Общая формула, выражающая это важное свойство, имеет следующий вид:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Приведем еще один пример на эту тему:

$$4. \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln(x^2 + 1) + C;$$

$$t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx.$$

В заключение этого раздела рассмотрим более сложный пример, в котором комбинируются оба метода. Интеграл

$$\int \arcsin x dx$$

вначале преобразуем, интегрируя по частям. Имеем:

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$u = \arcsin x, \quad dv = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x.$$

Далее, в новом интеграле — в правой части — сделаем подстановку

$$t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2x dx,$$

приводящую его к табличному интегралу:

$$- \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{1-x^2} + C.$$

В итоге получаем:

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Другой подход к данному интегралу состоит в том, что сначала он преобразуется с помощью подстановки:

$$\int \arcsin x dx = \int t \cos t dt;$$

$$t = \arcsin x \Rightarrow x = \sin t, \quad dx = \cos t dt.$$

Обратим внимание на то, что полученный интеграл лишь обозначением переменной отличается от интеграла, найденного нами ранее (пример 1 на стр. 170); поэтому мы вправе записать:

$$\int t \cos t dt = t \sin t + \cos t + C.$$

Теперь для получения окончательного результата остается вернуться к первоначальной переменной, т.е. выразить t через x .

Как видим, в отличие от дифференцирования, интегрирование функций является задачей более содержательной и творческой, а потому и более трудной (Ломать — не строить!). Поле деятельности здесь неизмеримо обширнее. Отсутствие изначальной четкой определенности в действиях, присущей нахождению производной, при интегрировании порождает естественные трудности, которые могут возникнуть уже при выборе метода; искусство интегрирования требует навыков, не лишней может оказаться и некоторая изобретательность. Для успеха необходи-

мы не только познания, но и развивающий вкус и воображение собственный опыт, приобретаемый лишь большим числом самостоятельно вычисленных интегралов.

§ 2. Определенный интеграл

Вольно или невольно, но люди постоянно производят те или иные измерения. Их интересуют расстояния между городами и промежутки времени между событиями, уровень богатства или бедности, рост народонаселения и продолжительность жизни, высота потолков в доме и размер жилплощади («Русский размер!»). Измерение площади стало одной из первых продиктованных жизненными потребностями проблем, стоявших у истоков геометрии. И хотя в наше время вычислить площадь прямоугольника, треугольника, трапеции вполне по силам каждому обладателю аттестата зрелости, задача значительно усложняется, если речь заходит о площади криволинейных фигур. Площадь круга средствами элементарной математики не определишь, и требуется (хотя бы *шапочное*) знакомство с пределами. А вот для измерения площади произвольных криволинейных фигур сверх того необходимо серьезное знакомство с интегралом. Геометрический аспект интегрирования и будет главным предметом наших последующих рассуждений.

Задача о площади плоской фигуры.

Формула Ньютона – Лейбница

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана *непрерывная положительная возрастающая* функция $y = f(x)$. Фигура $A\tilde{A}\tilde{B}B$, ограниченная графиком этой функции, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox , называется *криволинейной трапецией* (рис. 1). Поставим задачу определить ее площадь S . С этой целью при произвольном значении $x \in [a, b]$ построим переменную трапецию $A\tilde{A}\tilde{C}C$, площадь которой как функцию x обозначим $S(x)$. Выясним свойства этой функции.

На чертеже видно, как по приращению аргумента Δx определяется приращение площади ΔS . Сравним площадь ΔS с площадями прямоугольников, построенных на том же основании Δx и имеющих высоты $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$. Очевидно, выполняется следующее двойное неравенство:

$$f(x)\Delta x < \Delta S < f(x + \Delta x)\Delta x.$$

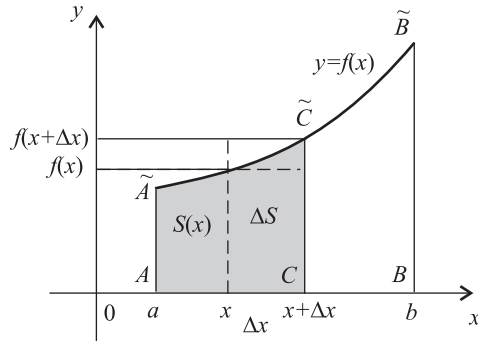


Рис. 1.

Преобразуем его, разделив почленно на Δx :

$$f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x + \Delta x).$$

Далее перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$. В этом процессе величина $f(x)$ остается постоянной, в силу непрерывности функции к тому же значению стремится и правая часть неравенства. Естественно, что такой же предел имеет и заключенная между ними дробь. Между тем, по определению, отношение приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \rightarrow 0$ стремится к производной функции, в итоге получаем:

$$\begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x), \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = S'(x) \end{cases} \Rightarrow S'(x) = f(x).$$

Отсюда следует, что функция $S(x)$ является одной из первообразных для функции $y = f(x)$ и находится по формуле:

$$S(x) = \int f(x) dx = F(x) + C$$

при некотором значении параметра C .

При $x = a$ трапеция $A\tilde{A}\tilde{C}C$ вырождается в отрезок, в этом случае ее площадь равна нулю, поэтому имеем:

$$S(a) = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a).$$

Таким образом, для любого значения аргумента x на отрезке $[a, b]$ находим:

$$S(x) = F(x) - F(a).$$

В частности, при $x = b$ получаем следующее выражение площади трапеции $AA\tilde{B}B$:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$

Установленное соотношение показывает, что *площадь криволинейной трапеции, порождаемой функцией $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, равна разности значений ее первообразной, вычисленных в концах отрезка.*

Полученный результат записывается следующим образом с помощью *определенного интеграла* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Это соотношение носит название *формулы Ньютона – Лейбница*. Числа a и b называются *нижним* и *верхним пределами интегрирования*.

Замечание 1. Формула Ньютона – Лейбница сохраняет свою силу и для функций $f(x)$: а) не являющихся возрастающими, и б) принимающими не только положительные, но и нулевые значения. Во всех случаях она задает площадь фигуры, ограниченной графиком данной функции, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox .

Замечание 2. Если функция отрицательная, то площадь криволинейной трапеции, расположенной в этом случае под осью Ox , выражается интегралом со знаком «минус».

Замечание 3. К определенным интегралам могут приводить и другие задачи, не связанные с вычислением площадей. В любом случае на первый план выступает определение первообразной, знание которой позволяет вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница.

Приведем примеры, в каждом из которых вычислен определенный интеграл и изображена фигура, площадь которой он выражает.

$$1. \int_{-1}^1 (1 - x^2)dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

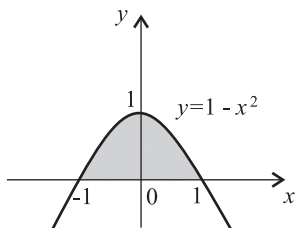


Рис. 2.

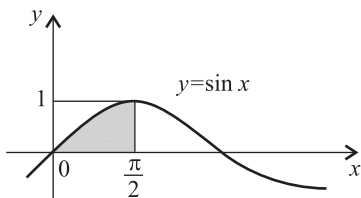


Рис. 3.

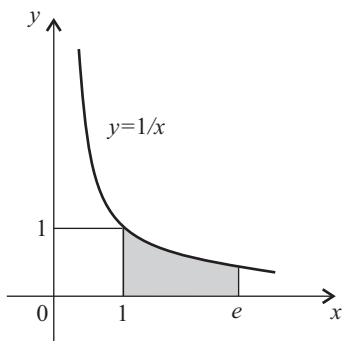


Рис. 4.

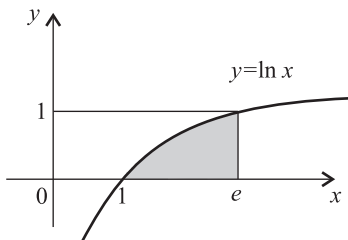


Рис. 5.

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

$$3. \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

$$4. \int_1^e \ln x = (x \ln x - x) \Big|_1^e = (e - e) - (-1) = 1.$$

Оглядываясь на эти примеры, обратим внимание на одно любопытное обстоятельство: при всем различии подинтегральных функций и непохожести их графиков, фигуры в трех последних примерах оказались равновелики одному и тому же единичному квадрату!

В заключительном, пятом примере на эту тему при вычислении первообразной применим тригонометрическую подстановку (обратим внимание на необходимое при этом изменение пределов в определенном интеграле!)

$$\begin{aligned}
 5. \quad \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx &= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{R^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \\
 &= \frac{R^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2} \right) \right] = \frac{\pi R^2}{2};
 \end{aligned}$$

$$x = R \sin t \Rightarrow dx = R \cos t dt, \quad \sqrt{R^2 - x^2} = R \cos t,$$

$$-R \leq x \leq R \Rightarrow -R \leq R \sin t \leq R \Rightarrow -1 \leq \sin t \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Этот полученный *аналитическим* путем результат вполне предсказуем, если принять во внимание *геометрический* смысл задачи. Дело в том, что графиком подинтегральной функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ служит верхняя полуокружность радиуса R (с центром в начале координат). После тождественных преобразований это уравнение принимает вид: $x^2 + y^2 = R^2$. С учетом того,

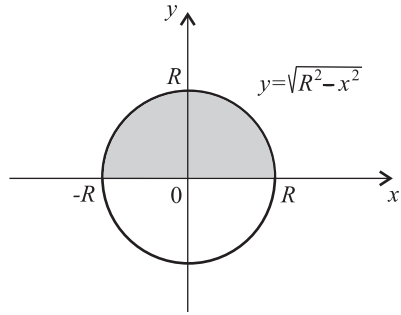


Рис. 6.

что $y \geq 0$, фигура, площадь которой мы определили с помощью определенного интеграла, есть не что иное, как *верхний полуокруг*, площадь которого равна $\frac{\pi R^2}{2}$.

Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Остановимся на еще одном подходе к задаче о площади криволинейной трапеции, который приводит к несколько иной, более общей трактовке определенного интеграла. Простоты ради, по-прежнему будем считать заданную на отрезке $[a, b]$ непрерывную функцию $y = f(x)$ неотрицательной, но не обязательно возрастающей — ее график изображен на рис. 7.

На чертеже кроме криволинейной трапеции $\tilde{A}\tilde{A}B\tilde{B}$ изображена *ступенчатая фигура*, образованная прямоугольниками с основаниями $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$ — так что правая

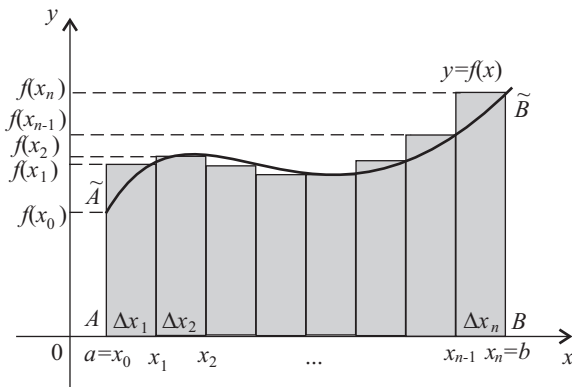


Рис. 7.

верхняя вершина каждого из них лежит на графике данной функции. Площадь S_n этой фигуры выражается в виде суммы площадей всех составляющих ее прямоугольников следующим образом:

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i.$$

Написанное выражение называется *интегральной суммой*; S_n дает *приближенное значение* площади S криволинейной трапеции, причем погрешность будет уменьшаться с ростом n , т. е. с увеличением числа прямоугольников. Точное равенство получится, если в интегральной сумме устремить n к бесконечности.

Определение 3. Предел последовательности интегральных сумм S_n называется *определенным интегралом функции* $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Символ $\int$ есть стилизованная буква S — от латинского слова «Summa», тот же смысл имеет и греческая буква Σ — читается: «сигма», используемая для обозначения суммирования.

Таким образом, определенный интеграл является постоянным числом, геометрически выражающим площадь криволинейной трапеции.

Пример.

Проиллюстрируем сказанное на простом примере, в котором несложность выкладок облегчит понимание дела.

Будем рассматривать линейную функцию: $y = kx$, заданную на отрезке $[0, b]$, — в этом случае криволинейная трапеция превращается в треугольник $O\tilde{B}B$ (рис. 8).

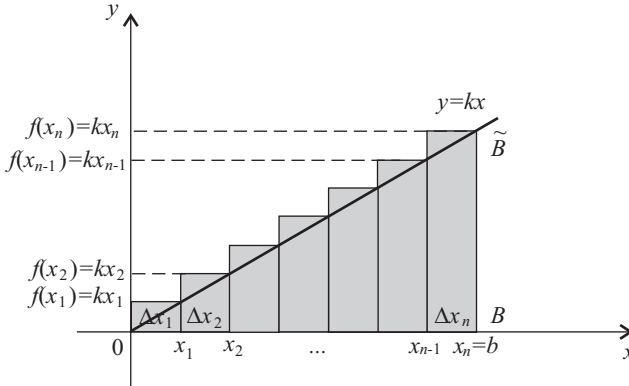


Рис. 8.

Запишем интегральную сумму S_n , выражающую в этом примере площадь составленной из прямоугольников ступенчатой фигуры, «описывающей» треугольник $O\tilde{B}B$:

$$\begin{aligned} S_n &= kx_1\Delta x_1 + kx_2\Delta x_2 + \dots + kx_n\Delta x_n = \\ &= k\frac{b}{n}x_1(1 + 2 + \dots + (n-1) + n). \end{aligned}$$

Несложными тождественными преобразованиями оно приводится к виду

$$S_n = k\frac{b}{n}\frac{b}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{kb^2(n+1)}{2n}.$$

Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{kb^2}{2}.$$

Замечание. Разумеется, проще найти площадь треугольника $O\tilde{B}B$ по формуле Ньютона – Лейбница:

$$S = \int_0^b kx dx = k\frac{x^2}{2} \Big|_0^b = k\frac{b^2}{2},$$

или вообще не применяя интегралов, а просто по элементарной формуле, перемножая длины катетов OB и $B\tilde{B}$:

$$S = \frac{1}{2}OB \cdot \tilde{B}B = \frac{1}{2}bkb = \frac{1}{2}kb^2.$$

Но нашей целью было проследовать в этом примере тем маршрутом, который приводит к определенному интегралу в новом, более общем, понимании, которое как раз и отражено в приведенном выше рассуждении Льва Толстого об интегрировании как о суммировании бесконечного числа бесконечно малых элементов: *при $n \rightarrow \infty$ каждое слагаемое в интегральной сумме является бесконечно малым, а число слагаемых стремится к бесконечности.*

*Физический смысл определенного интеграла:
задача о пути неравномерного движения*

Обратимся вновь к первым школьным задачам на движение, на этот раз в такой постановке: каково расстояние s между городами A и B , если, двигаясь со скоростью v , автобус покрывает его за время t ? Сравнивая эту задачу с той, которая формулировалась в начале предыдущей главы, мы видим, что в обеих задачах фигурируют одни и те же величины: *путь, скорость и время*; они различаются выбором неизвестного — в этой роли ранее выступала скорость, а теперь — путь. Каждый «успевающий» школьник знает, что первая из задач решается делением: $v = \frac{s}{t}$, а вторая — обратная задача — умножением, т. е. обратной операцией: $s = vt$. Полученный ответ удовлетворяет и ученика, и учителя, ибо оба подразумевают, что движение прямолинейное и *равномерное*.

Задача нахождения пути, сформулированная «по-взрослому», предполагает, что *известная* скорость движения не обязательно *постоянная*, а задана как некоторая непрерывная функция времени: $v = v(t)$. Поскольку ранее (глава 7) было установлено, что скорость через заданный путь определяется дифференцированием (аналогом деления):

$$v(t) = s'(t),$$

то естественно ожидать, что путь через заданную скорость определяется обратной операцией, т. е. интегрированием (аналогом умножения):

$$s(t) = \int v(t)dt.$$

Проанализируем с физической точки зрения ход рассуждений, который привел нас к понятию интеграла. Для этого абстрактным понятиям предыдущего пункта придадим физический смысл, полагая, что данная непрерывная функция $v = v(t)$ выражает скорость движения тела в каждый момент времени t на временном отрезке от T_0 до T . Требуется определить путь s , пройденный телом за этот отрезок времени. По сравнению с рис. 7 в рис. 9, отражающий физический смысл задачи, внесены необходимые изменения в обозначениях.

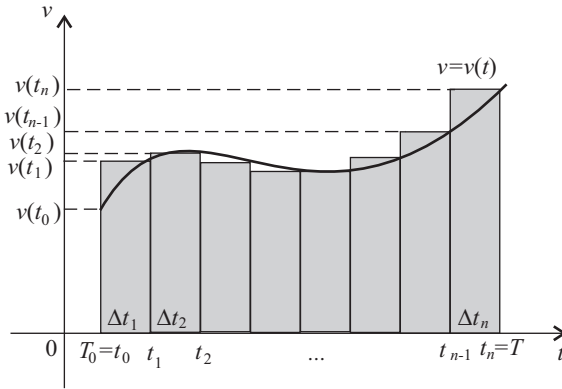


Рис. 9.

Обратим внимание на то, что на этот раз площадь каждого из прямоугольников, равная произведению основания на высоту, физически численно выражает путь, который проходило бы тело, если бы на каждом из временных промежутков $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ оно двигалось с постоянной скоростью, соответственно, равной $v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_n)$. Это движение отличается от реального, поэтому интегральная сумма

$$s_n = v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \dots + v(t_n)\Delta t_n \equiv \sum_{i=1}^n v(t_i)\Delta t_i$$

дает *приближенное* значение истинного пути, которое тем точнее его выражает, чем мельче временные промежутки, на которых мы считаем скорость постоянной, т.е. чем больше n — число временных промежутков. Для того, чтобы найти реально пройденный путь s , необходимо перейти к пределу, устремив n к бесконечности:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(t_i)\Delta t_i.$$

Этот процесс приводит к интегралу, получаем формулу

$$s = \int_{T_0}^T v(t) dt,$$

которая и выражает *физический смысл интеграла*.

Для нахождения численного значения пройденного пути воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница:

$$\int_{T_0}^T v(t) dt = s(t) \Big|_{T_0}^T = s(T) - s(T_0).$$

Внесем физический смысл и в рассмотренный выше пример (см. рис. 8), предположив, что данная линейная функция выражает скорость движения: $v = kt$. Вычисляя по формуле Ньютона – Лейбница интеграл от линейной функции, характеризующей равномерное возрастание скорости, мы находим пройденный путь в согласии с известным по школьному курсу механики законом равноускоренного движения:

$$s = \int_0^T v(t) dt = \int_0^T kt dt = k \frac{t^2}{2} \Big|_0^T = \frac{kT^2}{2}.$$

В заключение отметим как непреложный факт, что проникновение ученых, представителей разных наук, в таинства окружающего мира во все времена вдохновлялось математиками — оно и по сей день происходит в самом тесном альянсе с математикой. Для каждого уважающего себя, *думающего* человека это серьезный стимул к тому, чтобы не жалеть времени и сил на изучение этой науки.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры взаимно обратных алгебраических операций.
2. Что называется первообразной?
3. Дайте определение неопределенного интеграла.
4. Восстановите по памяти табличные интегралы.
5. Перечислите правила интегрирования и проверьте их дифференцированием.
6. Запишите формулу интегрирования по частям и проверьте ее дифференцированием.

7. Как применяется метод замены переменной? Приведите примеры.
8. Дайте определение определенного интеграла, используя понятие площади криволинейного интеграла.
9. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.
10. Определите определенный интеграл как предел последовательности интегральных сумм.
11. Каков физический смысл определенного интеграла?

Задания для аудиторной и домашней работы

А. Неопределенный интеграл

I. Применяя тождественные преобразования подинтегральных функций, таблицу интегралов и правила интегрирования, найти следующие интегралы:

- | | |
|--|--|
| 1) $\int (4x^2 - 1)^2 dx;$ | 9) $\int (2^x + 3^x)^2 dx;$ |
| 2) $\int \frac{3x + \sqrt{x} - 2}{x} dx;$ | 10) $\int \frac{dx}{e^x};$ |
| 3) $\int \frac{(x-2)(x-4)}{x^2} dx;$ | 11) $\int (2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1) dx;$ |
| 4) $\int \sqrt[3]{x} dx;$ | 12) $\int \sqrt{1 + \sin 2x} dx;$ |
| 5) $\int x \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} + 2} dx;$ | 13) $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx;$ |
| 6) $\int \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx;$ | 14) $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}};$ |
| 7) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx;$ | 15) $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$ |
| 8) $\int 2^x 3^x dx;$ | |

II. Методом интегрирования по частям найти следующие интегралы:

- | | | |
|------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| 1) $\int x \sin x dx;$ | 3) $\int x^3 \ln x dx;$ | 5) $\int e^x \sin x dx;$ |
| 2) $\int x \ln x dx;$ | 4) $\int \frac{x dx}{e^x};$ | 6) $\int e^x \cos x dx.$ |

III. Применяя указанные подстановки, найти следующие интегралы.

- 1) $\int (1 + 2x)^5 dx, t = 1 + 2x;$ 7) $\int \sin^3 x dx, t = \cos x;$
- 2) $\int e^{3x} dx, t = 3x;$ 8) $\int \operatorname{tg} x dx, t = \cos x;$
- 3) $\int \frac{dx}{3x - 4}, t = 3x - 4;$ 9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}, t = 1 - x^2;$
- 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, x = at;$ или $x = \sin t;$
- 5) $\int \frac{4dx}{\sin^2 2x}, t = 2x;$ 10) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}, t = 1 + x^2;$
- 6) $\int \sin^3 x \cos x dx, t = \sin x;$ 11) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + x^2}}, t = 1 + x^2.$

IV. Комбинируя различные приемы, найти следующие интегралы:

- 1) $\int \frac{2x + 1}{x^2 + 1} dx;$ 6) $\int \frac{dx}{1 - x^2};$ 11) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x};$
- 2) $\int \cos^2 x dx;$ 7) $\int \frac{dx}{4 - x^2};$ 12) $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1 + x}};$
- 3) $\int \sin^2 x dx;$ 8) $\int \arccos x dx;$ 13) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}.$
- 4) $\int \cos 2x \sin x dx;$ 9) $\int \operatorname{arctg} x dx;$
- 5) $\int \sin 2x \cos x dx;$ 10) $\int \operatorname{arccotg} x dx;$

В. Определенный интеграл

I. Вычислить следующие определенные интегралы и выяснить их геометрический смысл:

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_0^2 (2x+1)dx; & 5) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^6+1}; & 9) \int_1^e x \ln x dx; \\
 2) \int_0^1 (x-1)dx; & 6) \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx; & 10) \int_{\frac{e^2}{x \ln x}}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}; \\
 3) \int_{-1}^2 x^2 dx; & 7) \int_{-1}^0 x\sqrt{1+x} dx; & 11) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx; \\
 4) \int_0^{e-1} \frac{dx}{x+1}; & 8) \int_0^1 x e^{1-x} dx; & 12) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx.
 \end{array}$$

II. В каждом из следующих упражнений начертить фигуру, ограниченную заданными линиями, и найти ее площадь:

$$\begin{array}{ll}
 1) y = 4 - x^2, y = 0; & 6) y = x^2 - x + 1, \\
 & y = -2x^2 + 2x + 1; \\
 2) y = x^3 - x^2, y = 0; & 7) y = x^2 - 2x + 1, \\
 & y = -2x^2 + 4x + 1; \\
 3) y = 2 - x^2, y = 1; & 8) y = 2x^2 + 2x + 2, \\
 & y = -x^2 - x + 2; \\
 4) y = x^4 - x, y = 0; & 9) x^2 + y^2 = 4, \\
 & y = 2 - \frac{1}{2}x^2. \\
 5) y = x^3 + x^2, y = 0; &
 \end{array}$$

С. Несобственные интегралы

I. Несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом вычисляется по следующему правилу:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(F(x) \Big|_a^N \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) - F(a).$$

II. Несобственный интеграл от функции, имеющей при $x = a$ бесконечный разрыв, вычисляется по следующему правилу:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow a} \int_{\alpha}^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow a} \left(F(x) \Big|_{\alpha}^b \right) = F(b) - \lim_{\alpha \rightarrow a} F(\alpha).$$

В каждом из случаев, если соответствующий предел не существует, то говорят, что *интеграл расходится*.

Вычислить следующие несобственные интегралы или установить их расходимость. Истолковать геометрически полученные результаты.

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2};$ | 5) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^x};$ | 9) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}};$ |
| 2) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x};$ | 6) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1};$ | 10) $\int_0^1 \ln x dx;$ |
| 3) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx;$ | 7) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2 + 1};$ | 11) $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};$ |
| 4) $\int_0^{\infty} \frac{2xdx}{x^2 + 1};$ | 8) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$ | 12) $\int_{-e}^e \frac{dx}{x}.$ |

Задания для индивидуальной домашней работы № 8

В каждом задании N — номер вашего варианта.

I. Применяя различные методы, найти следующие неопределенные интегралы:

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1) $\int [(N+1)x^{N-1} - 1]^2 dx;$ | 5) $\int \sin^3 Nx dx;$ |
| 2) $\int \frac{e^{2N} - 9}{e^N - 3} dx;$ | 6) $\int \cos^2 Nx dx;$ |
| 3) $\int x^N \ln Nx dx;$ | 7) $\int \frac{dx}{\cos^2 Nx}.$ |
| 4) $\int x \sin Nx dx;$ | |

II. Вычислить следующие определенные интегралы и установить их геометрический смысл:

$$1. \int_0^{N+1} (x - N - 1)dx; \quad 2. \int_{e-3}^{e^2-3} \frac{dx}{x + N}; \quad 3. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + N^2}.$$

III. Начертить фигуру, ограниченную заданными линиями, и найти ее площадь:

$$y = x^2 - N, \quad y = N - x^2.$$

Приложение **«Догонит ли Ахиллес Черепаху?»**

Этот вопрос, поставленный в свое время древнегреческим философом Зеноном, открывает 3-ю часть 3-го тома романа Льва Толстого «Война и мир», откуда и заимствован эпиграф, предположенный этой главе. Вот в каких словах излагает проблему автор знаменитой эпопеи.

Известен софизм древних, состоящий в том, что Ахиллес никогда не догонит впереди идущую Черепаху, несмотря на то, что Ахиллес идет в десять раз быстрее Черепахи: как только Ахиллес пройдет пространство, отделяющее его от Черепахи, Черепаха пройдет впереди его одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдет эту десятую, Черепаха пройдет одну сотую и т. д. до бесконечности. Задача эта представлялась древним неразрешимой. Бессмысленность решения (что Ахиллес никогда не догонит Черепаху) вытекала из того только, что были допущены прерывные единицы движения, тогда как движение и Ахиллеса, и Черепахи совершалось непрерывно. Принимая все более и более мелкие единицы движения, мы только приближаемся к решению вопроса, но никогда не достигаем его. Только допустив бесконечно малую величину и восходящую от нее прогрессию до одной десятой и взяв сумму этой геометрической прогрессии, мы достигаем решения вопроса. Новая отрасль математики, достигнув искусства обращаться с бесконечно малыми величинами, и в других более сложных вопросах движения дает ответы на вопросы, казавшиеся неразрешимыми. В отыскании законов исторического движения происходит совершенно то же. Постигание законов этого движения есть цель истории — заключает Лев Толстой.

От истории обратимся к математической и физической стороне дела и рассмотрим различные версии описанного события.

Версия историческая: Ахиллес бесхитростный

Считая скорости персонажей *постоянными*, примем скорость Черепахи за *единицу*, а скорость Ахиллеса, догоняющего Черепаху, за v ($v > 1$); расстояние, пройденное Черепахой к моменту, когда Ахиллес начинает погоню, ради простоты, примем также за единицу. Спрашивается: в какой момент времени Ахиллес

догонит Черепаху? Вот как нынешний школьник, лишенный сомнений и раздумий древних мыслителей, решает эту задачу.

Проходимый Черепахой путь s как функция времени численно равен времени: $s(t) = t$, а путь, проходимый Ахиллесом, начинающим движение на единицу времени позже, выразится так: $s(t) = v(t - 1)$. Момент времени T , когда Ахиллес догонит Черепаху (а в том, что рано или поздно это произойдет, сомневается разве что *Фома неверующий!*) определяется уравнением

$$v(t - 1) = t$$

и легко находится:

$$T = \frac{v}{v - 1}.$$

При $v = 10$ (гипотеза Зенона) получаем: $T = 10/9$. Но даже если бы скорость Ахиллеса была намного меньше, например, всего в 1,1 раза превосходила скорость Черепахи, он все равно бы ее догнал, правда, значительно позднее, в этом случае $T = 11$.

Рассмотрим ту же задачу под *древнегреческим парадоксальным* углом зрения. Расстояние $\Delta s_1 = 1$, разделяющее персонажей, когда Ахиллес начинает бег, он проходит за время $1/v$; за это время Черепаха уходит вперед на расстояние, численно равное этому отрезку времени, т. е. на $1/v$. Второй этап Ахиллес покрывает за время $1/v^2$, за которое Черепаха *отрывается* от него на расстояние, численно равное $1/v^2$ и т. д. — до бесконечности. Закономерность такова, что n -й временной промежуток, который требуется Ахиллесу для преодоления очередного отрезка пути, равен $1/v^n$. Обратимся к «хронометру»: *предстартовое* время ожидания: $\Delta t_0 = 1$;

$$\begin{array}{ll} \Delta s_1 = 1, & \Delta t_1 = \frac{\Delta s_1}{v} = \frac{1}{v}; \\ \Delta s_2 = \frac{1}{v}, & \Delta t_2 = \frac{\Delta s_2}{v} = \frac{1}{v^2}; \\ \Delta s_3 = \frac{1}{v^2}, & \Delta t_3 = \frac{\Delta s_3}{v} = \frac{1}{v^3}; \\ \dots & \dots \\ \Delta s_n = \frac{1}{v^{n-1}}, & \Delta t_n = \frac{\Delta s_n}{v} = \frac{1}{v^n}; \\ \dots & \dots \end{array}$$

В итоге, время погони выражается бесконечной суммой временных отрезков (*бессмысленной*, если не привлекать теорию

пределов):

$$T = \sum \Delta t_i = 1 + \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^3} + \dots + \frac{1}{v^n} + \dots$$

Теория пределов вносит в этот результат необходимую ясность: *эта бесконечная сумма бесконечно убывающих слагаемых имеет вполне определенное, конечное значение*, определяемое по формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$T = \frac{v}{v-1}.$$

Разумеется, полученное таким путем значение T совпадает с найденным ранее ответом (вне сомнений, известным и древним грекам, которые были не глупее нас и так же легко могли бы получить его приведенным выше, не «окольным», а «школьным» способом!). Важно отметить, что успех Ахиллесе гарантирует *одно и то же, постоянное* преимущество в скорости!

Сравнительные характеристики пути, скорости и времени, положенные в основу проведенных расчетов, иллюстрирует рис. 10.

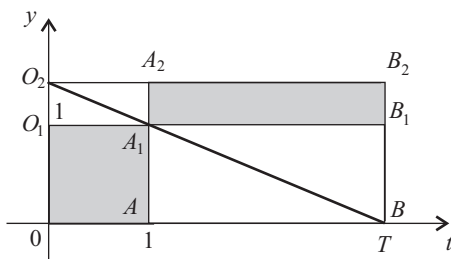


Рис. 1.

На рис. 10 равенство путей геометрически выражается равенством площадей прямоугольников AA_2B_2B и OO_1B_1B : $v(T-1) = T$, что равносильно равенности заштрихованного прямоугольника $A_1A_2B_2B_1$ и единичного квадрата OO_1A_1A : $(v-1)(T-1) = 1$. Точка T находится пересечением прямой O_2A_1 с осью t .

А теперь посмотрим, как развивались бы события, если бы «парадоксов друг» Зенон несколько изменил правила игры.

Версия гипотетическая: Ахиллес хитроумный

Эта версия предполагает, что Черепаха передвигается с прежней *постоянной единичной* скоростью, а скорость Ахиллеса, хотя в каждое мгновение и превосходит Черепашью, но с течением времени убывает. Замечая, что с каждым шагом он все

больше приближается к Черепахе, и на этом основании желая сэкономить силы, устающий с течением времени Ахиллес легкомысленно позволяет себе поэтапно сбавлять скорость и бежать по облегченному графику, построенному следующим образом.

Первый этап, равный единице, отделяющий его от Черепахи, ушедшей со старта раньше на единицу времени, Ахиллес преодолевает в 2 раза быстрее Черепахи, которая за это время уйдет вперед на расстояние $1/2$. Далее, второй этап длиной в $1/2$, он преодолевает, двигаясь с меньшей скоростью, равной $3/2$, за время, равное $1/3$; за это время Черепаха уходит вперед на расстояние $1/3$. Третий этап — длиной в $1/3$ — он преодолевает, передвигаясь с еще меньшей скоростью, равной $4/3$, за время, равное $1/4$; Черепаха за это время *отрывается* от него на расстояние $1/4$.

В общем виде «сценарий забега» Ахиллеса таков: n -й этап, равный $1/n$, он проходит со скоростью $(n+1)/n$ за время $1/(n+1)$; за это время Черепаха *уходит в отрыв* на расстояние $1/(n+1)$ и т. д. — до бесконечности. Включаем «хронометр»: *предстартовое* время ожидания: $\Delta t_0 = 1$;

$$\begin{array}{ll} \Delta s_1 = 1, & v_1 = 2, & \Delta t_1 = \frac{\Delta s_1}{v_1} = \frac{1}{2}; \\ \Delta s_2 = \frac{1}{2}, & v_2 = \frac{3}{2}, & \Delta t_2 = \frac{\Delta s_2}{v_2} = \frac{1}{3}; \\ \Delta s_3 = \frac{1}{3}, & v_3 = \frac{4}{3}, & \Delta t_3 = \frac{\Delta s_3}{v_3} = \frac{1}{4}; \\ \dots & & \dots \\ \Delta s_{n-1} = \frac{1}{n-1}, & v_{n-1} = \frac{n}{n-1}, & \Delta t_{n-1} = \frac{\Delta s_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{1}{n}; \\ \Delta s_n = \frac{1}{n}, & v_n = \frac{n+1}{n}, & \Delta t_n = \frac{\Delta s_n}{v_n} = \frac{1}{n+1}; \\ \dots & & \dots \end{array}$$

Для того, чтобы Ахиллес догнал Черепаху, нужно, чтобы (по образцу первой версии) сумма бесконечного числа временных промежутков его бега равнялась некоторому *конечному* числу T :

$$\sum \Delta t_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \dots = T.$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Убедимся в том, что сумма слагаемых в каждой скобке превосходит $1/2$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2};$$

$$\underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2};$$

всего восемь слагаемых

...

Поскольку при неограниченном росте n число скобок неограниченно возрастает, то никакого *конечного* числа T в сумме мы не получим. По этой версии Ахиллес действительно никогда не догонит Черепаху! ¹⁾ *Утрата первоначального превосходства в скорости на каждом этапе слишком велика и не позволяет компенсировать стартовое отставание.*

Сравнительные характеристики пути, скорости и времени в этой версии геометрически иллюстрируются на рис. 11.

На этот раз равенство путей геометрически выразилось бы равновеликостью заштрихованной ступенчатой фигуры и единичного квадрата. Площадь S_n этой ступенчатой фигуры равна сумме площадей составляющих ее прямоугольников:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-2} \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} \frac{1}{n}.$$

Тождественным преобразованием эта сумма приводится к виду

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

¹⁾ Шутки ради напомним курьезный случай, когда однажды хитроумный *Братец Черепах* «обогнал» не менее быстрого, чем Ахиллес, *Братца Кролика*, — о чем поведал миру Джоэль Харрис в знаменитых «Сказках дядюшки Римуса»! Если бы самоуверенный грызун грыз кроме морковки и гранит науки (или хотя бы почитывал «Войну и мир»), то никогда бы не стал связываться с Черепахами.

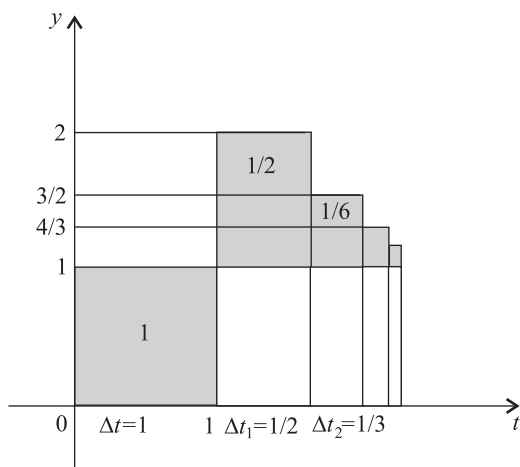


Рис. 2.

И хотя $\lim S_n = 1$ при $n \rightarrow \infty$, сумма временных промежутков при этом не стремится к конечному пределу и необходимое равенство площадей, а следовательно, и равенство путей ни в какой *конечный* момент времени не достигается.

Предлагаем читателю убедиться самостоятельно, что если бы Ахиллес избрал более скромное поэтапное уменьшение скорости, гарантированное, например, формулой

$$v_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^n},$$

то он не проиграл бы исторический забег, а обогнал бы Черепаху менее чем за 3 и даже менее чем за $2^{1/2}$ единицы времени!

Как справедливо заметил великий писатель-философ, решение задач такого рода сводится к одному вопросу: *какова сумма бесконечного числа бесконечно малых слагаемых?* Основанные на неразвитости математического понятия бесконечности, парадоксы Зенона — и среди них апория, попавшая в «Войну и мир», — обнаруживали необъяснимые противоречия в понятиях движения, пространства и времени, и тем самым побуждали его современников задуматься над природой вещей, предостерегая от слишком простых и очевидных объяснений. Они интересны тем, что наглядно вскрывают диалектическое единство и противоречия конечного и бесконечного, непрерывного и дискретного.

***Примерный вариант итоговой зачетной
или экзаменационной работы***

1. Найти общее решение системы уравнений и указать одно частное решение.
2. Вычислить определитель.
3. Найти точку пересечения и угол, образованный прямыми.
4. Определить сумму первых десяти членов последовательности.
5. Вычислить пределы.
6. Продифференцировать функции.
7. Определить интервалы монотонности и экстремумы функции.
8. Найти неопределенные интегралы.
9. Вычислить определенные интегралы и установить их геометрический смысл.
10. Начертить фигуру, ограниченную данными линиями, и найти ее площадь.

Литература

1. *Баврин И.И.* Краткий курс высшей математики. — М.: Физматлит, 2003.
2. *Ключин В.Л.* Основы высшей математики. Изд. 3-е. — М.: Изд-во РУДН, 2005.
3. *Никольский С.М.* Элементы математического анализа. — М.: Дрофа, 2002.

Дополнительная литература

1. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, 1990.
2. *Шикин Е.В., Шикина Г.Е.* Гуманитариям о математике. — М.: Агар, 1999.

Учебное издание

*МИХЕЕВ Виктор Иванович
ПАВЛЮЧЕНКО Юрий Витальевич*

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА, КРАТКИЙ КУРС

Редактор *В.В. Панюхин*
Оригинал-макет: *Е.В. Макеев*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 12.05.08. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,25.
Уч.-изд. л. 12,25. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 978-5-9221-0978-9



9 785922 109789